

А.В. ПОГОРЕЛОВ



ЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ



А. В. ПОГОРЕЛОВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

513

П 43

УДК 513

Книга является второй частью предлагаемого автором школьного курса геометрии, построенного на специальной системе аксиом. Содержание книги и порядок расположения материала традиционные. Книга будет полезна для студентов вузов педагогических специальностей и для учителей средних школ.

Алексей Васильевич Погорелов

Элементарная геометрия

Стереометрия

М., 1970 г., 96 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *З. В. Автонева*

Сдано в набор 31/XII 1969 г.

Подписано к печати 19/VIII 1970 г. Бумага $84 \times 108^{1/32}$.

Физ. печ. л. 3. Условн. печ. л. 5,04. Уч.-изд. л. 4,87.

Тираж 200 000 экз. Т-09867.

Цена книги 14 к. Заказ 471.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома

Комитета по печати при Совете Министров СССР,

Измайловский проспект, 29.

2-2-2

23-70

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
§ 1. Аксиомы стереометрии и некоторые их следствия . . .	5
§ 2. Параллельность прямых и плоскостей	10
§ 3. Перпендикулярность прямой и плоскости	17
§ 4. Перпендикуляры и наклонные	21
§ 5. Перпендикулярность плоскостей	26
§ 6. Углы между прямыми и плоскостями	31
§ 7. Двугранные, трехгранные и многогранные углы . . .	35
§ 8. Движения и другие преобразования в пространстве . .	42
§ 9. Простейшие тела. Призма и пирамида	48
§ 10. Элементы проекционного черчения	55
§ 11. Объемы простых тел	61
§ 12. Тела вращения	74
§ 13. Объемы тел вращения	82
§ 14. Площади поверхностей вращения	91

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является второй частью предлагаемого мной курса элементарной геометрии. Так же как и в первой части, изложение начинается формулировкой трех пространственных аксиом, на которые опираются доказательства теорем. Содержание книги традиционное. Но изложение более строгое, чем принятое в школьных учебниках. Это относится не только к началу курса, где доказательства непосредственно опираются на аксиомы, но и к последующим темам. Такова, например, тема об измерении объемов тел и площадей поверхностей. Специально подобранные к каждому параграфу упражнения существенно дополняют краткое изложение предмета.

А. Погорелов

§ 1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И НЕКОТОРЫЕ ИХ СЛЕДСТВИЯ

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. В стереометрии, так же как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем. При этом отправными являются свойства простейших геометрических фигур, выражаемые аксиомами. Простейшими фигурами в пространстве являются — точка, прямая и плоскость. Введение нового геометрического образа — плоскости — заставляет расширить систему аксиом. Именно, мы вводим группу аксиом C , которая выражает основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом.

C_1 . Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

✦ C_2 . Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Этой аксиомой утверждается, что если две различные плоскости α и β имеют общую точку C , то существует прямая c , принадлежащая каждой из этих плоскостей. Причем если точка X принадлежит обоим плоскостям, то она принадлежит прямой c .

C_3 . Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость и притом только одну.

Это значит, что если две различные прямые a и b имеют общую точку C , то существует плоскость γ , содержащая прямые a и b . Плоскость, обладающая этим свойством, единственная.

Таким образом, система аксиом стереометрии состоит из пяти групп аксиом планиметрии: I — V и группы аксиом C. Для удобства изложения мы напомним аксиомы планиметрии первых двух групп.

I_1 . Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие прямой, и точки, не принадлежащие прямой.

I_2 . Каковы бы ни были две точки, существует и притом только одна прямая, проходящая через эти точки.

II_1 . Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

II_2 . Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой.

Теорема 1.1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну.

Доказательство. Пусть a — данная прямая и B не лежащая на ней точка (рис. 1). Отметим на прямой a какую-нибудь точку A . Такая точка существует по аксиоме I_1 . Проведем через точки A и B прямую b (аксиома I_2). Прямые a и b различны, так

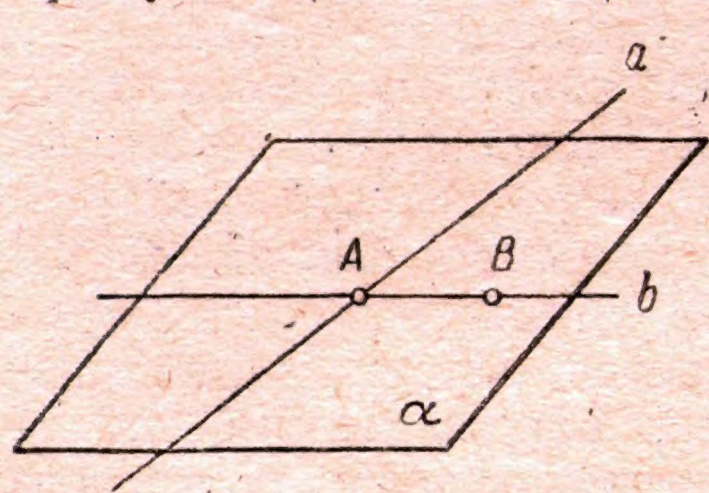


Рис. 1.

как точка B прямой a не лежит на прямой a . Прямые a и b имеют общую точку A .

Проведем через прямые a и b плоскость α (аксиома C_3). Эта плоскость проходит через прямую a и точку B .

Докажем теперь, что плоскость α , проходящая через прямую a и точку B , единственная. Допустим, существует другая, отличная от α плоскость α' , проходящая через прямую a и точку B . По аксиоме C_2 плоскости α и α' , будучи различны, пересекаются по прямой. Следовательно, любые три общие точки плоскостей α и α' лежат на прямой. Но точка B и две точки прямой a заведомо не лежат на одной прямой.

Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

Теорема 1.2. Если две точки прямой a лежат на плоскости α , то вся прямая лежит на этой плоскости.

Доказательство. По аксиоме I_1 существует точка A , не лежащая на прямой a . Проведем через прямую a и точку A плоскость α' (рис. 2). Если плоскость α' совпадает с α , то плоскость α , таким образом, содержит прямую a . Если плоскость α' отлична от α , то эти плоскости пересекаются по прямой a' , содержащей две точки прямой a . По аксиоме I_2 прямая a' совпадает с a и, следовательно, прямая a лежит в плоскости α . Теорема доказана.

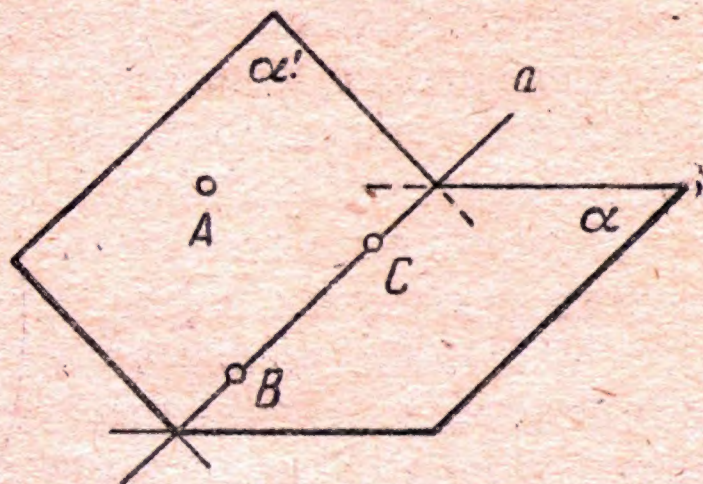


Рис. 2.

Теорема 1.3. Две различные плоскости либо не пересекаются, либо пересекаются по прямой.

Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

Первое утверждение этой теоремы следует из аксиомы C_2 . Второе утверждение следует из теоремы 1.2.

Теорема 1.4. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

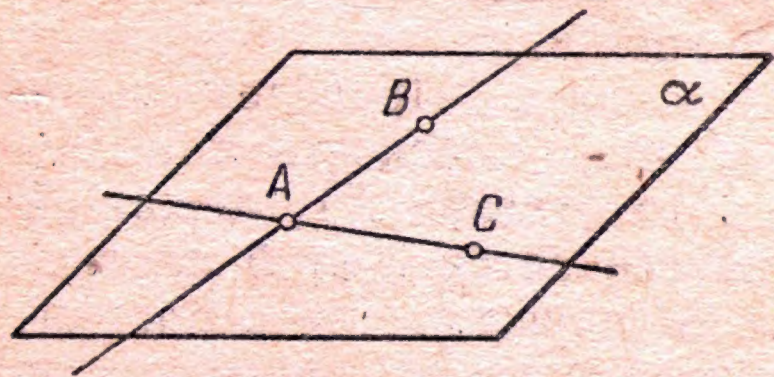


Рис. 3.

Доказательство. Пусть A, B, C — данные три точки, не лежащие на одной прямой. Проведем прямые AB и AC (рис. 3). Эти прямые различны, так

как точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме C_3 через прямые AB и AC можно провести плоскость. Эта плоскость содержит точки A, B, C .

Докажем, что плоскость α , проходящая через точки A, B, C , единственная. Действительно, плоскость,

проходящая через точки A, B, C , по теореме 1.2 содержит прямые AB и AC . А по аксиоме C_3 эти условия определяют плоскость однозначно. Теорема доказана.

Теорема 1.5. *Плоскость разбивает пространство на два полупространства. Если точки X и Y принадлежат одному полупространству, то отрезок XY не пересекается с плоскостью. Если же точки X и Y принадлежат разным полупространствам, то отрезок XY пересекается с плоскостью.*

Доказательство. Пусть α — данная плоскость. Отметим точку A , не лежащую на плоскости α . Разобьем все точки пространства, не лежащие в плоскости α , на два класса по следующему правилу. Точку X отнесем в первый класс, если отрезок AX не пересекается с плоскостью α . Точку X отнесем

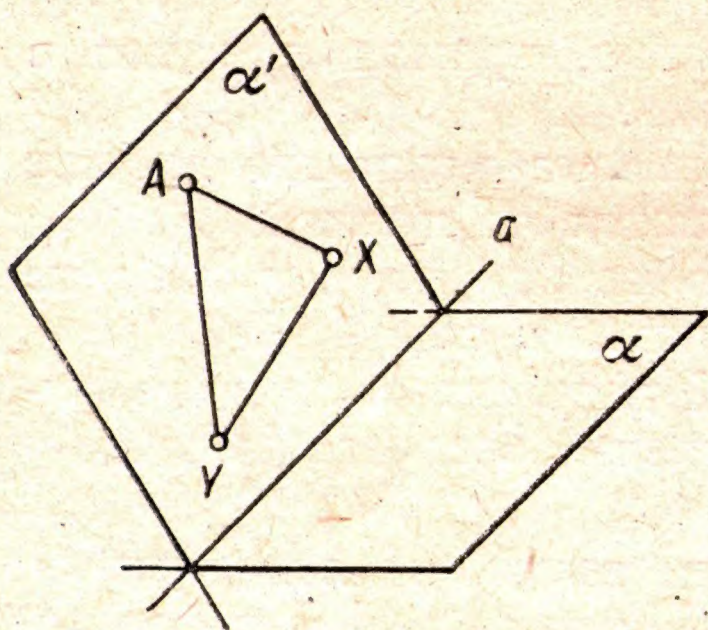


Рис. 4.

во второй класс, если отрезок AX пересекается с плоскостью α . Таким образом, каждая точка X пространства, не лежащая в плоскости α , будет отнесена в один из классов. Покажем, что это разбиение пространства обладает свойствами, указанными в теореме.

Пусть точки X и Y принадлежат первому классу. Проведем через точки A, X и Y плоскость α' . Если плоскость α' не пересекается с плоскостью α , то отрезок XY , лежащий в плоскости α' , тоже не пересекается с этой плоскостью. Допустим, плоскость α' пересекается с плоскостью α (рис. 4). Так как плоскости различны, то их пересечение происходит по некоторой прямой a . Прямая a разбивает плоскость α' на две полуплоскости. Точки X и Y принадлежат одной полуплоскости, именно той, в которой лежит точка A . Поэтому отрезок XY не пересекается с прямой a , а следовательно и с плоскостью α .

Если точки X и Y принадлежат второму классу, то плоскость α' заведомо пересекается с α , так как

отрезок AX плоскости α' пересекается с α . Точки X и Y принадлежат одной полуплоскости разбиения плоскости α' на полуплоскости прямой a . Следовательно, отрезок XY не пересекается с прямой a , а значит и с плоскостью α .

Если, наконец, точка X принадлежит одному классу, а точка Y другому, то плоскость α' пересекается с α , а точки X, Y лежат в разных полуплоскостях плоскости α' . Поэтому отрезок XY пересекается с прямой a , а значит и с плоскостью α . Теорема доказана.

В заключение этого параграфа мы хотим сделать одно замечание относительно аксиомы I_1 . Эта аксиома в списке аксиом стереометрии приобретает другой смысл, чем тот, который она имела в планиметрии.

В планиметрии эта аксиома утверждает существование точек вне данной прямой на плоскости, в которой лежит прямая. Именно в таком смысле эта аксиома применялась нами при построении геометрии на плоскости.

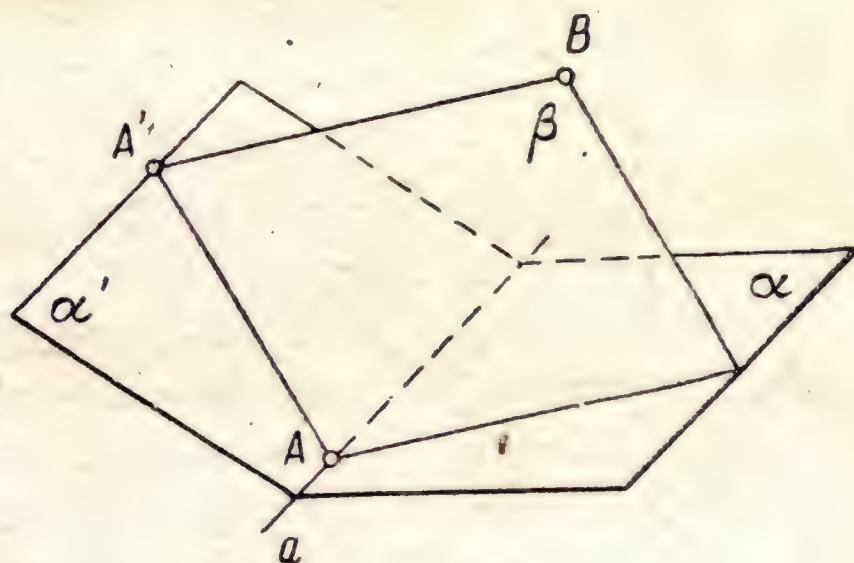


Рис. 5.

Теперь аксиома I_1 утверждает вообще существование точек, не лежащих на данной прямой. Из нее непосредственно не следует существования точек вне данной прямой на данной плоскости, в которой лежит прямая, и это требует специального доказательства.

Пусть α — плоскость и a — прямая в этой плоскости. Докажем существование точек в плоскости α , не лежащих на прямой a . Отметим точку A на

прямой a и точку A' вне плоскости α . Проведем плоскость α' через прямую a и точку A' (рис. 5). Возьмем точку B вне плоскости α' и проведем через прямую AA' и точку B плоскость β . Плоскости α и β пересекаются по прямой, проходящей через точку A . Точки этой прямой, отличные от A , лежат в плоскости α вне прямой a .

Что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Дана прямая a и не лежащая на ней точка A . Доказать, что все прямые, проходящие через точку A и пересекающие прямую a , лежат в одной плоскости.

2. Даны прямые $a_1, a_2, a_3, \dots$. Доказать, что если любые две из этих прямых пересекаются, то либо все они проходят через одну точку, либо все они лежат в одной плоскости.

3. Доказать, что если любые четыре точки фигуры лежат в одной плоскости, то фигура плоская, т. е. лежит в плоскости.

4. Даны $2n$ точек $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ и плоскость α , не проходящая ни через одну из этих точек. Доказать, что плоскость α пересекает не более чем n^2 отрезков $A_p A_q$, попарно соединяющих данные точки.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Пусть α — плоскость, a — прямая в этой плоскости и A — точка в плоскости α , не лежащая на прямой a . По аксиоме параллельных (V) через точку A в плоскости α проходит одна и только одна прямая, параллельная a .

Две прямые в пространстве называются *скрещивающимися*, если они не параллельны и не пересекаются. Таковы, например, прямые, на которых лежат ребра куба AB и CD (рис. 6). Скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости. Для двух различных прямых в пространстве могут быть три и только три возможности: либо прямые пересекаются в одной точке, либо они параллельны, либо они скрещивающиеся.

Понятие параллельности вводится для прямой и плоскости и для двух плоскостей. Именно, прямая и

плоскость или две плоскости называются *параллельными*, если они, т. е. прямая и плоскость или соответственно две плоскости, не пересекаются. В настоящем параграфе мы докажем ряд теорем о параллельности прямых и плоскостей.

Теорема 2.1. *Плоскость α и не лежащая в ней прямая a параллельны тогда и только тогда, когда в плоскости α найдется прямая a' , параллельная a .*

Доказательство. Пусть a' — прямая в плоскости α , параллельная прямой a . Утверждается, что прямая a параллельна плоскости α . Действительно,

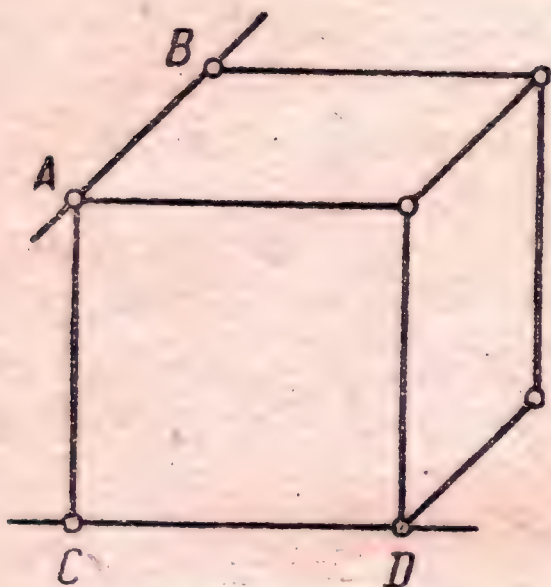


Рис. 6.

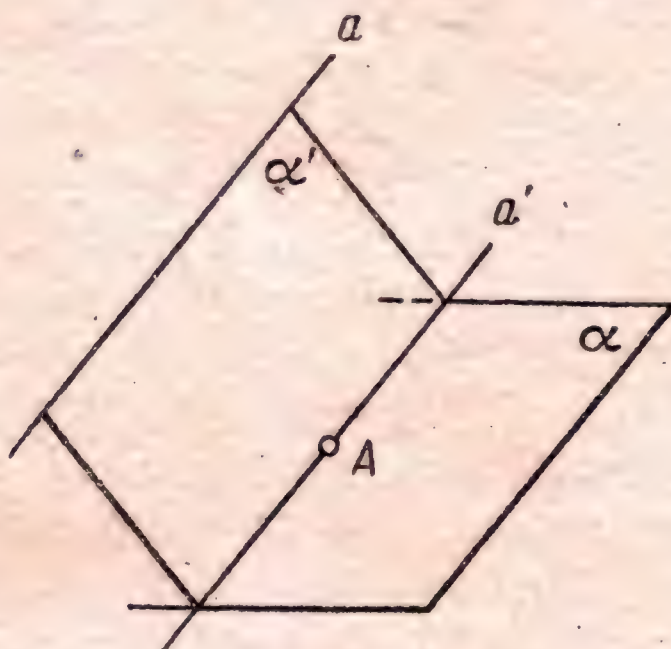


Рис. 7.

пусть α' — плоскость, в которой лежат прямые a и a' (рис. 7). Она отлична от α , так как прямая a не лежит в плоскости α . Плоскости α и α' пересекаются по прямой a' . Если бы прямая a пересекала плоскость α , то точка пересечения принадлежала бы прямой a' . Но это невозможно, так как прямые a и a' параллельны. Итак, прямая a не пересекает плоскость α , т. е. параллельна плоскости α .

Пусть прямая a параллельна плоскости α . Отметим точку A в плоскости α и проведем плоскость α' через прямую a и точку A . Эта плоскость пересечет плоскость α по некоторой прямой a' . Прямая a лежит в одной плоскости с прямой a' (плоскости α') и не пересекает эту прямую, так как не пересекает плоскость α . Следовательно, прямая a параллельна прямой a' . Теорема доказана полностью.

Теорема 2.2. *Если прямая a параллельна прямым b и c , то прямые b и c параллельны.*

Доказательство. Случай, когда прямые a , b , c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Поэтому предположим, что прямые не лежат в одной плоскости. Пусть β — плоскость, в которой

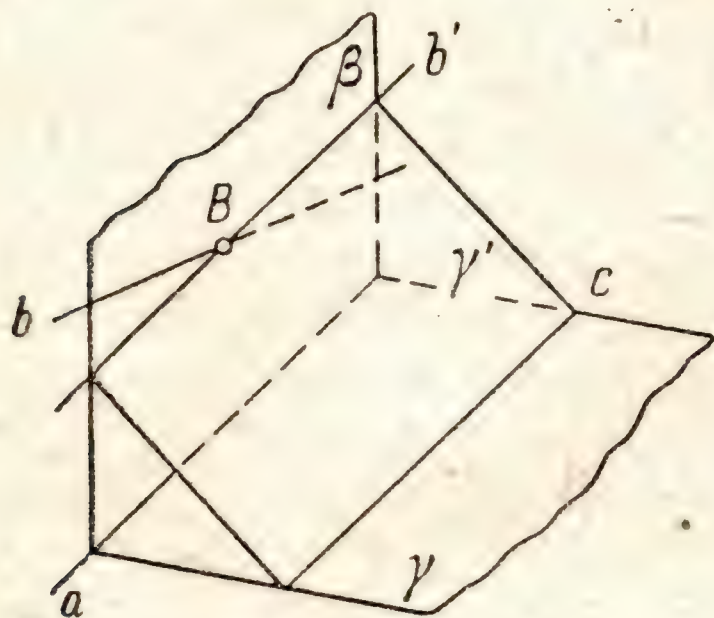


Рис. 8.

лежат прямые a и b , а γ — плоскость, в которой лежат прямые a и c (рис. 8). Плоскости β и γ различны. По теореме 2.1 прямая b параллельна плоскости γ , а прямая c параллельна плоскости β . Отметим на прямой b точку B , не лежащую в плоскости γ , и проведем плоскость γ' через прямую c и точку B . Плоскость γ' пересекает плоскость β по

прямой b' , проходящей через точку B . Прямая b' не пересекает прямую c , так как лежит в плоскости β . Отсюда следует, что b' не пересекает плоскость γ и, следовательно, не пересекает прямую a .

По аксиоме параллельных прямая b' совпадает с b . Итак, прямые b и c лежат в одной плоскости (именно, плоскости γ') и не пересекаются, т. е. параллельны. Теорема доказана.

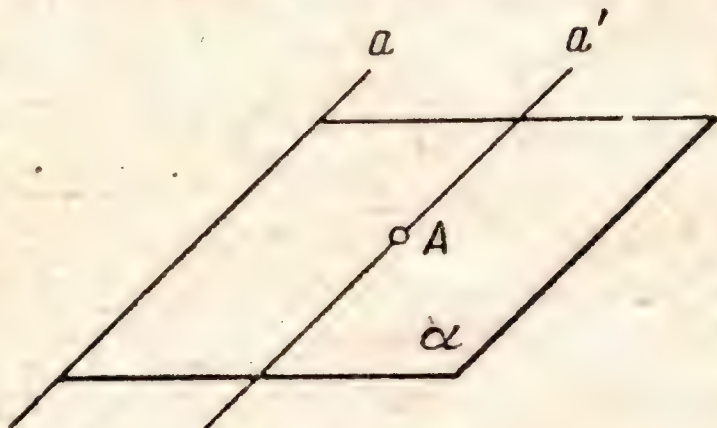


Рис. 9.

Теорема 2.3. Через точку A вне данной прямой a можно провести к прямой a одну и только одну параллельную прямую.

Доказательство. Проведем через прямую a и точку A плоскость α (рис. 9). По аксиоме параллельных в плоскости α можно провести прямую a' , параллельную a . Докажем, что прямая a' , параллельная a , единственная. Допустим, существует другая прямая a'' , проходящая через точку A и параллельная прямой a . Через прямые a и a'' можно провести плоскость α' . Плоскость α' проходит через прямую a и точку A , следовательно, по теореме 1.1 совпадает

с α . Теперь по аксиоме параллельных заключаем о совпадении прямых a' и a'' . Теорема доказана.

Теорема 2.4. Если плоскость α параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости β , то плоскости α и β параллельны.

Доказательство. Пусть b_1 и b_2 — две пересекающиеся прямые в плоскости β , параллельные плоскости α . Плоскости α и β заведомо различны. Допустим, они пересекаются, следовательно, пересекаются по некоторой прямой c (рис. 10). Прямые b_1 и b_2 не пересекают плоскость α , следовательно, не пересекают прямую c этой плоскости. Но это невозможно, так как прямые b_1 , b_2 и c лежат в одной плоскости (плоскости β). Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

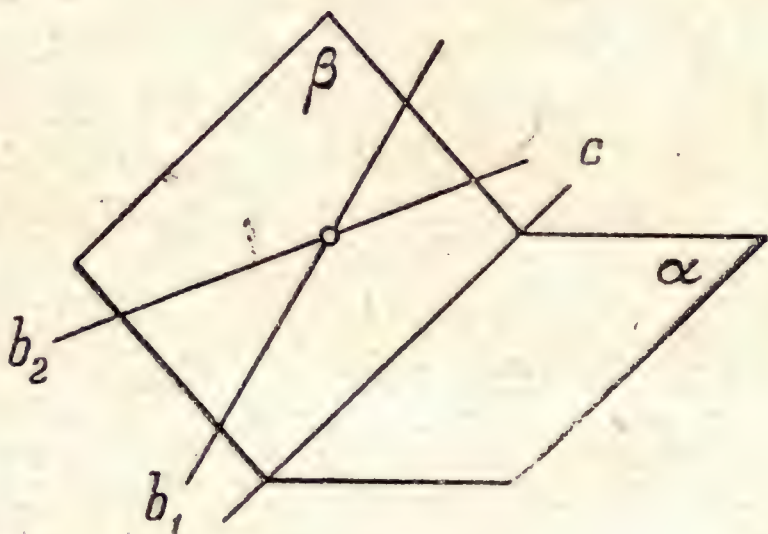


Рис. 10.

Теорема 2.5. Через точку A вне данной плоскости α можно провести и притом единственную плоскость, параллельную α .

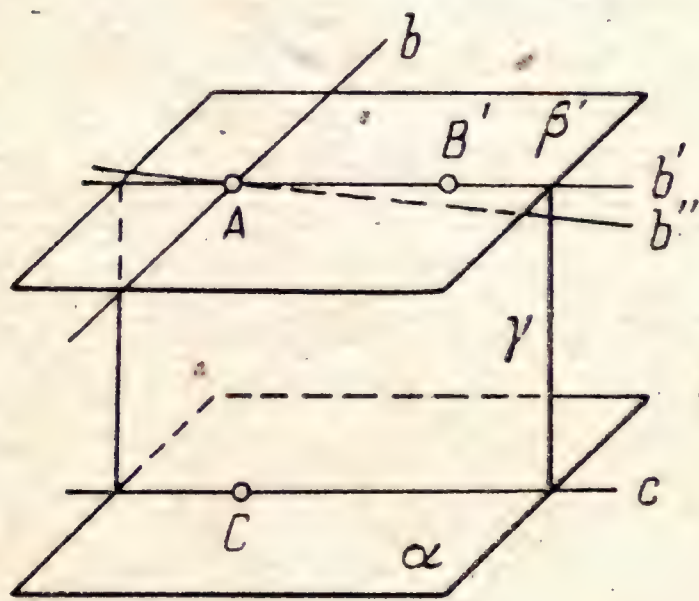


Рис. 11.

Доказательство. Проведем на плоскости α какие-нибудь две пересекающиеся прямые a_1 и a_2 . Проведем через точку A параллельные им прямые b_1 и b_2 . Прямые b_1 и b_2 различны. В противном случае прямые a_1 и a_2 были бы параллельны по теореме 2.2. Плоскость, проходящая через

прямые b_1 и b_2 , параллельна плоскости α по теореме 2.4.

Допустим, через точку A проходят две различные плоскости β' и β'' , параллельные плоскости α (рис. 11). Пусть b — прямая, по которой эти

плоскости пересекаются. Отметим точку B' на плоскости β' , не лежащую на прямой b , и точку C на плоскости α . Проведем через точки A, B', C плоскость γ . Она пересечет плоскости β' и β'' по прямым b' и b'' , а плоскость α по прямой c . Прямые b' и b'' не пересекают прямую c , так как не пересекают плоскость α , в которой лежит прямая c . По аксиоме параллельных прямые b' и b'' совпадают. Итак, плоскости β' и β'' проходят через две различные пересекающиеся прямые b и b' . По аксиоме C_3 они совпадают. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 2.6. Пусть α и β — две параллельные плоскости, c — прямая, не лежащая ни в одной из этих плоскостей, параллельная плоскости α . Тогда эта прямая параллельна плоскости β .

Доказательство. По теореме 2.1 в плоскости α найдется прямая c' , параллельная c (рис. 12).

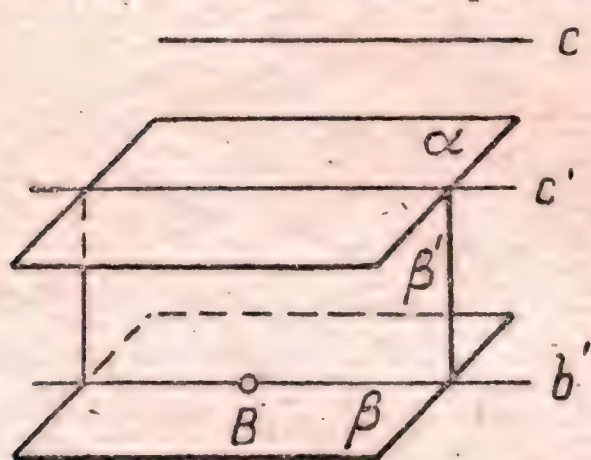


Рис. 12.

Возьмем точку B в плоскости β и проведем плоскость β' через прямую c' и точку B . Она пересечет плоскость β по прямой b' , параллельной c' , следовательно, параллельной c . По теореме 2.1 отсюда следует параллельность прямой c и плоскости β . Теорема доказана.

Из теоремы 2.6 следует, что если прямая c , не лежащая в плоскости α , пересекает эту плоскость, то она пересекает любую плоскость, параллельную α .

Из теоремы 2.6 следует также, что если α и β — параллельные плоскости и прямая a , параллельная плоскости α , имеет с плоскостью β хотя бы одну общую точку, то прямая a вся принадлежит плоскости β .

Теорема 2.7. Через прямую a , параллельную плоскости α , можно провести и притом только одну плоскость, параллельную α .

Доказательство. Проведем через произвольную точку A прямой a плоскость β , параллельную плоскости α (теорема 2.5). Прямая a лежит в плоскости β согласно второму следствию теоремы 2.6. Единственность плоскости β следует из теоремы 2.5. Теорема доказана.

Из теоремы 2.7 следует, что если плоскость α параллельна различным плоскостям β и γ , то эти плоскости параллельны. Действительно, если бы плоскости β и γ пересекались, а следовательно, пересекались по некоторой прямой a , то через эту прямую проходили бы две плоскости, параллельные плоскости α . Но это невозможно по теореме 2.7.

Теорема 2.8. Пусть α и β — различные пересекающиеся плоскости, c — прямая, по которой плоскости пересекаются, и c' — прямая, параллельная каждой из плоскостей. Тогда прямые c и c' параллельны.

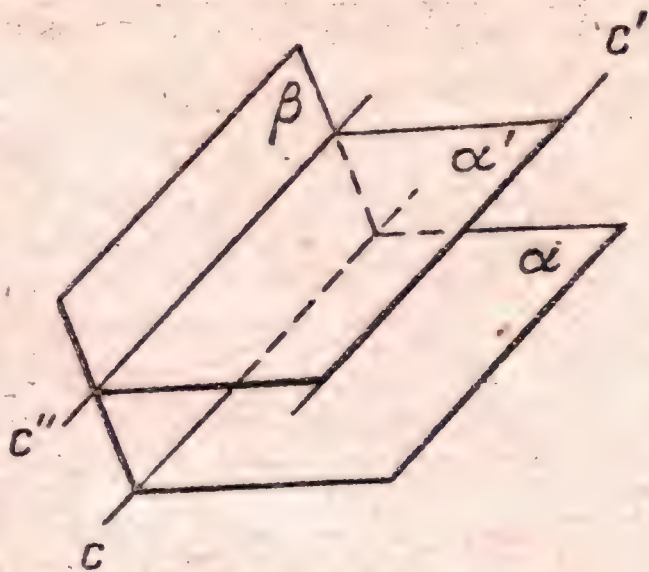


Рис. 13.

Доказательство. Проведем плоскость α' через прямую c' , параллельную плоскости α (рис. 13). По теореме 2.7 в применении к прямой c и плоскости α' заключаем, что плоскости α' и β пересекаются по некоторой прямой c'' . Прямые c' и c'' параллельны, так как лежат в одной плоскости (α') и не пересекаются. Прямые c и c'' тоже параллельны. По теореме 2.2 заключаем о параллельности c и c' . Теорема доказана.

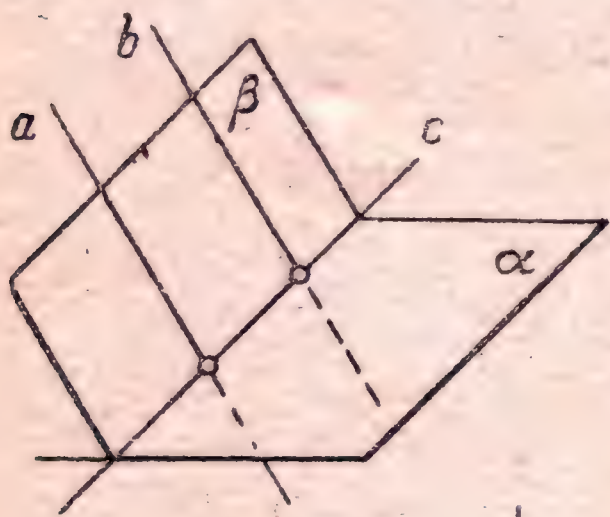


Рис. 14.

Теорема 2.9. Если прямая a , не лежащая в плоскости α , пересекает эту плоскость, то любая прямая b , параллельная a , также пересекает плоскость α .

Доказательство. Проведем плоскость β через прямые a и b (рис. 14). Она отлична от α и поэтому пересекается с плоскостью α по некоторой прямой c . Прямая c пересекает прямую a , следовательно, пересекает параллельную прямую b . Других точек пересечения у прямой b с плоскостью α нет, так как они должны быть на линии пересечения плоскостей α и β , т. е. на прямой c . Теорема доказана.

Теорема 2.10. *Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны.*

Доказательство. Пусть α и β — две параллельные плоскости, а a и b — пересекающие их параллельные прямые (рис. 15). Пусть A_1 и A_2 , B_1 и B_2 — точки пересечения прямых a и b с плоскостями α , β . Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересечет плоскости α и β по прямым A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Эти прямые параллельны, так как

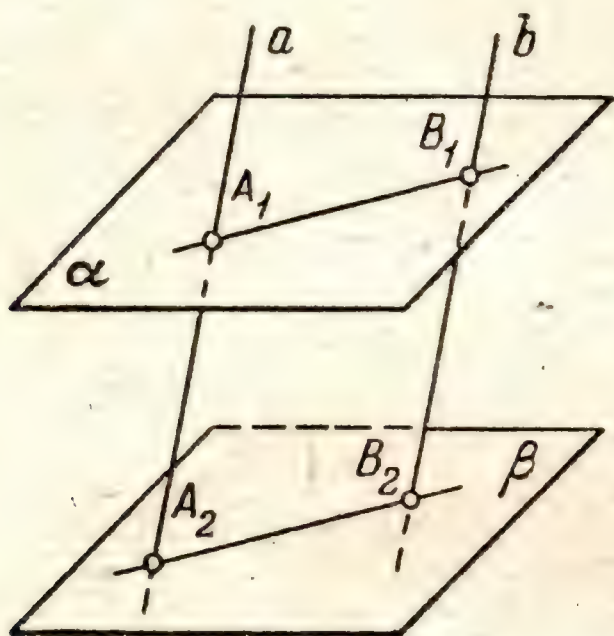


Рис. 15.

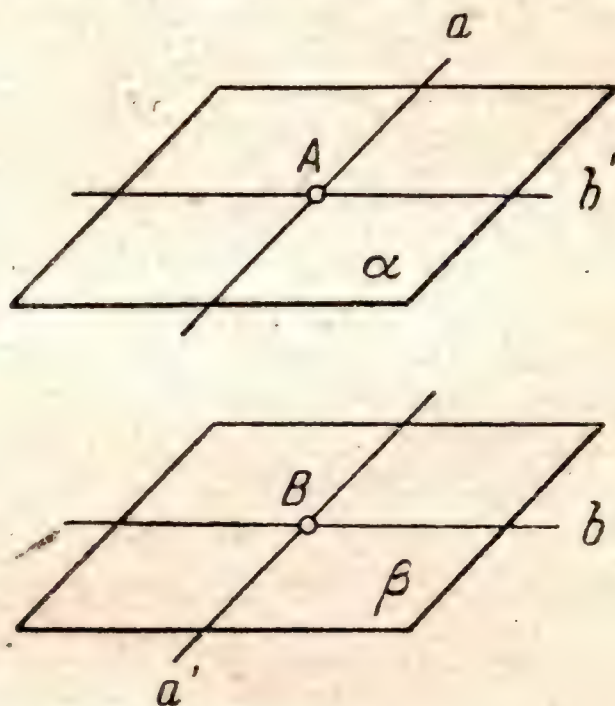


Рис. 16.

лежат в одной плоскости и заведомо не пересекаются, ибо плоскости α и β не пересекаются. Таким образом, фигура $A_1A_2B_2B_1$ — параллелограмм. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 как противолежащие стороны параллелограмма равны. Теорема доказана.

В заключение покажем, что *любые две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях*. Действительно, пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые. Возьмем на прямой a точку A и проведем через нее прямую b' , параллельную b . На прямой b возьмем точку B и проведем через нее прямую a' , параллельную a (рис. 16). Плоскости α и β , проходящие через прямые a и b' , b и a' соответственно, параллельны по теореме 2.4.

Упражнения

1. Доказать, что три различные плоскости либо пересекаются в одной точке, либо проходят через одну прямую, либо параллельны некоторой прямой.

2. Доказать, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.

3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — три параллельные плоскости и a, b — две прямые, их пересекающие. Доказать, что соответствующие отрезки прямых a и b между плоскостями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — пропорциональны, т. е. если A_1, A_2, A_3 — точки пересечения прямой a с плоскостями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а B_1, B_2, B_3 — точки пересечения прямой b с этими плоскостями, то

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_1}{B_3B_1}.$$

4. Даны четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 , не лежащие в одной плоскости. Доказать, что плоскость, параллельная скрещивающимся прямым A_1A_2 и A_3A_4 , пересекает остальные четыре прямые, попарно соединяющие данные точки, в вершинах параллелограмма.

5. Доказать, что геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость.

6. Даны четыре точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости. Доказать, что три прямые, соединяющие середины скрещивающихся отрезков AB и CD , AC и BD , AD и BC , пересекаются в одной точке.

§ 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Понятие перпендикулярности для пересекающихся прямых, следовательно, прямых, лежащих в одной плоскости, было введено в планиметрии и хорошо известно. Теперь мы определим понятие перпендикулярности для скрещивающихся прямых. Для этого прежде всего отметим следующее свойство перпендикулярных пересекающихся прямых. *Если пересекающиеся прямые a и b перпендикулярны и a', b' — параллельные им пересекающиеся прямые, то они тоже перпендикулярны.*

Доказательство. Если прямые a, b, a', b' лежат в одной плоскости, то это свойство известно из планиметрии. Допустим, прямые не лежат в одной плоскости. Тогда прямые a и b лежат в некоторой плоскости α , а прямые a' и b' — в плоскости α' , параллельной α (теоремы 2.1 и 2.4). Пусть C — точка пересечения прямых a и b , а C' — точка пересечения прямых a' и b' (рис. 17). Отметим на прямых a и b точки A и B , отличные от C , и проведем через них прямые, параллельные CC' . Эти прямые пересекают прямые a' и b' в точках A' и B' . Четырехугольники

$ACC'A'$, $CBV'C'$, $ABV'A'$ суть параллелограммы (теорема 2.10). Отсюда $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, т. е. треугольники ABC и $A'B'C'$ равны. Следовательно, $\angle C = \angle C'$, т. е. прямые a' , b' перпендикулярны.

Отмеченное свойство пересекающихся перпендикулярных прямых делает естественным следующее определение. Две скрещивающиеся прямые называются

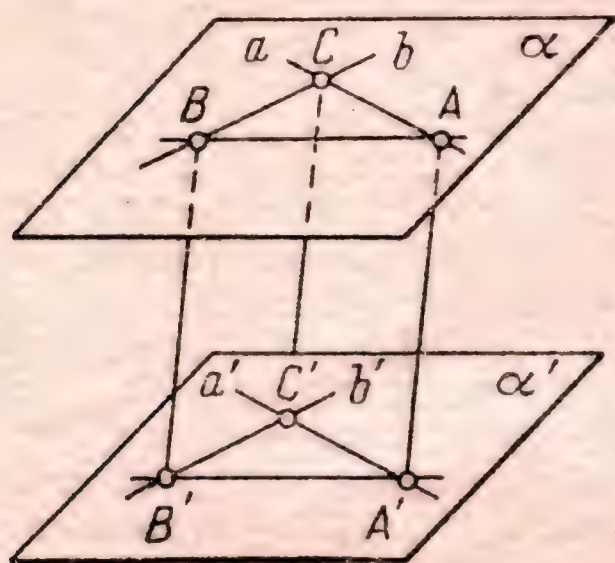


Рис. 17.

перпендикулярными, если параллельные им пересекающиеся прямые перпендикулярны.

Теорема 3.1. Если прямая a перпендикулярна прямой b , то она перпендикулярна любой прямой b' , параллельной b .

Доказательство. По определению существуют пересекающиеся перпендикулярные прямые a''

и b'' , параллельные a и b соответственно. По свойству параллельных прямых (теорема 2.2) прямая b'' параллельна b' . Следовательно, прямые a и b' параллельны пересекающимся перпендикулярным прямым a'' и b'' , а поэтому сами перпендикулярны. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 непосредственно вытекает следующая

Теорема 3.2. Если прямые a и b перпендикулярны и прямая a' параллельна a , а прямая b' параллельна b , то прямые a' и b' тоже перпендикулярны.

Определим понятие перпендикулярности для прямой и плоскости. Мы будем говорить, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема 3.3. Если прямая a перпендикулярна плоскости α , а прямая b параллельна прямой a , то прямая b также перпендикулярна плоскости α .

Доказательство. Пусть x — произвольная прямая, лежащая в плоскости α . По условию теоремы она перпендикулярна прямой a . Следовательно, по теореме 3.1 прямая x перпендикулярна прямой b .

А это значит, что прямая b перпендикулярна плоскости α .

Теорема 3.4. Если прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости α , то прямая a перпендикулярна плоскости α .

Доказательство. Пусть b и c — пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости α , перпендикулярные прямой a . Обозначим через A точку пересечения прямых b и c . Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку A (рис. 18).

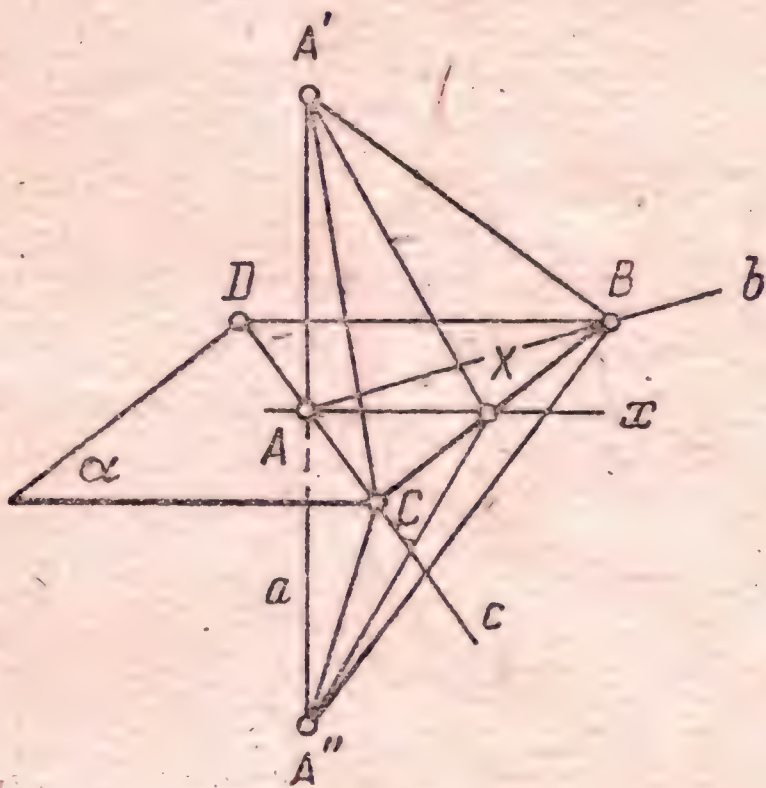


Рис. 18.

Проведем произвольную прямую x через точку A в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a . Можно считать, что прямая x отлична от прямых b и c . Отметим на прямой c точки C и D по разные стороны от точки A , а на прямой b точку B , отличную от A . Прямая x пересекает сторону CD треугольника CDB , а следовательно, по известной теореме планиметрии пересекает в точке X одну из двух других сторон. Пусть для определенности это будет сторона BC .

Отложим на прямой a из точки A в разные стороны от этой точки равные отрезки AA' и AA'' . Треугольник $A'SA''$ равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AA' = AA''$). По той же причине треугольник $A'BA''$ тоже равнобедренный. Следовательно, треугольники $A'BC$ и $A''BC$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда равенство углов $A'BX$ и $A''BX$ и, следовательно, равенство треугольников $A'BX$ и $A''BX$ по первому признаку равенства. Из равенства сторон $A'X$ и $A''X$ этих треугольников заключаем, что треугольник $A'XA''$ равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также

высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a .

Так как прямая a перпендикулярна произвольной прямой x , проходящей через точку A , то она перпендикулярна любой прямой x' , лежащей в плоскости α . Действительно, для такой прямой x' можно указать параллельную ей прямую x , проходящую через точку A . А перпендикулярность прямых a и x влечет за собой перпендикулярность прямых a и x' по теореме 3.1. Итак, теорема доказана для того случая, когда прямая a проходит через точку пересечения прямых b и c .

Рассмотрим общий случай. Пусть прямая a не проходит через точку A . Проведем через точку A прямую a' , параллельную a . Прямая a' перпендикулярна прямым b и c по теореме 3.1. Следовательно, прямая

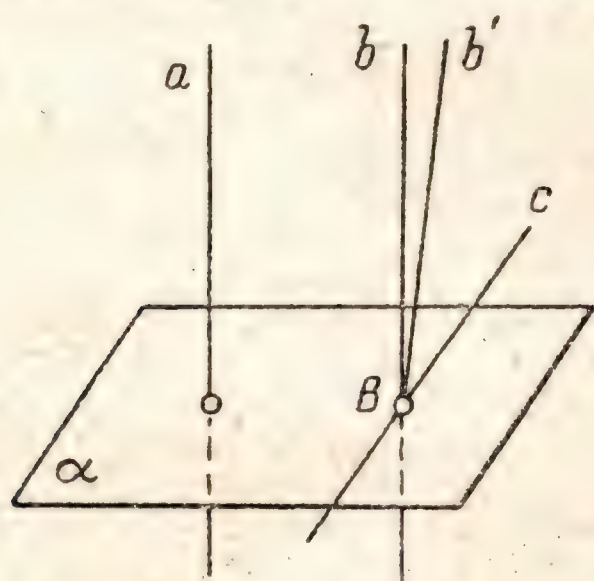


Рис. 19.

a' перпендикулярна плоскости α по доказанному. Теперь по теореме 3.3 заключаем о перпендикулярности прямой a и плоскости α . Теорема доказана полностью.

Теорема 3.5. *Прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.*

Доказательство.

Прежде всего заметим, что прямая a , перпендикуляр-

ная плоскости α , пересекает плоскость α . Действительно, в противном случае прямая a параллельна плоскости α и, следовательно, параллельна некоторой прямой a' , лежащей в плоскости α (теорема 2.1). А прямая a' заведомо не перпендикулярна прямой a .

Пусть a и b — прямые, перпендикулярные плоскости α (рис. 19). Докажем, что они параллельны. Пусть B — точка пересечения прямой b с плоскостью α . Проведем через точку B прямую b' , параллельную a . По теореме 3.1 она перпендикулярна плоскости α . Допустим, прямая b' отлична от b . Проведем через прямые b и b' плоскость β . Плоскость β пересекает плоскость α по некоторой прямой c . Прямые b и b' являются перпендикулярами, восставлен-

ными к прямой c из точки B в плоскости β . А это, как известно, невозможно. Теорема доказана.

Теорема 3.6. *Плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.*

Доказательство.

Пусть c — данная прямая, а α и β — перпендикулярные ей плоскости (рис. 20).

Проведем через прямую c две различные плоскости.

Они пересекут плоскости α и β по прямым a_1, a_2 и b_1, b_2 , перпендикулярным прямой c . Прямые a_1 и b_1 , как прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны. По той же причине параллельны прямые a_2 и b_2 .

Теперь по теореме 2.4 заключаем о параллельности плоскостей α и β . Теорема доказана.

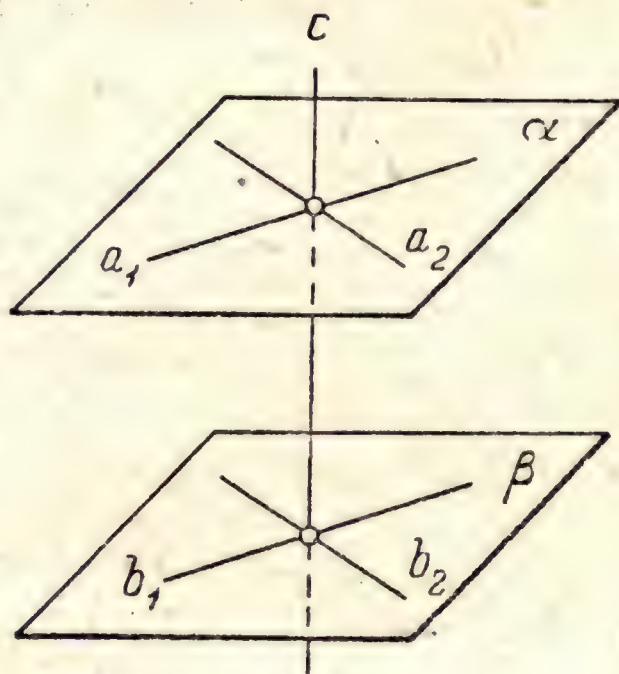


Рис. 20.

Упражнения

1. Доказать, что прямые, проходящие через данную точку перпендикулярно данной прямой, лежат в одной плоскости.

2. Доказать, что через данную точку можно провести и притом только одну прямую, перпендикулярную двум данным непараллельным прямым.

3. Доказать, что не существует четырех попарно перпендикулярных прямых.

4. Доказать, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B , есть плоскость, перпендикулярная прямой AB и проходящая через середину отрезка AB .

5. Даны четыре точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости. Доказать, что шесть плоскостей, проходящих через середины отрезков, попарно соединяющих эти точки, перпендикулярно отрезкам, пересекаются в одной точке. Эта точка находится на одинаковом расстоянии от данных четырех точек.

§ 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ И НАКЛОННЫЕ

Теорема 4.1. *Через данную точку к данной прямой можно провести и притом только одну перпендикулярную плоскость.*

Доказательство. Пусть a — данная прямая и A — данная точка. Рассмотрим сначала тот случай,

когда точка A лежит на прямой a . Проведем через прямую a две различные плоскости и в каждой из них проведем перпендикуляр к прямой a через точку A . Пусть b и c — эти перпендикуляры (рис. 21). По теореме 3.4 плоскость γ , проходящая через прямые b и c , перпендикулярна прямой a .

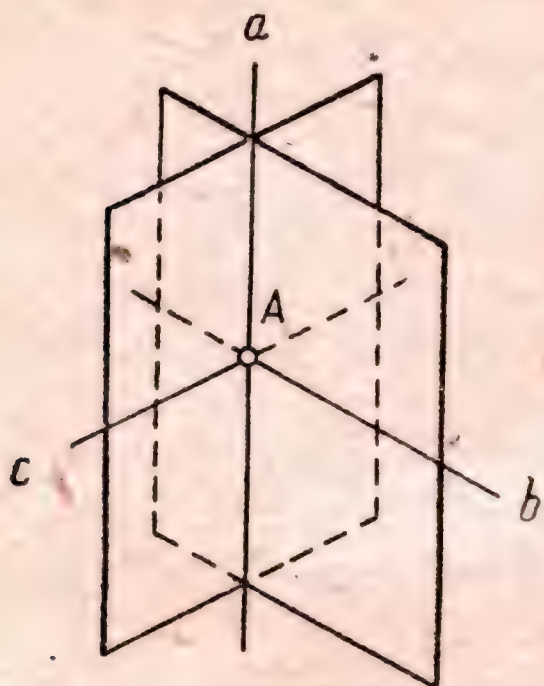


Рис. 21.

Пусть теперь точка A не лежит на прямой a . Проведем через произвольную точку A' прямой a плоскость α' , перпендикулярную a . Проведем далее плоскость α через точку A , параллельную плоскости α' . Так как для каждой прямой в плоскости α можно указать параллельную прямую в плоскости α' , то плоскость α так же перпендикулярна прямой a .

Плоскость α , проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a , единственная. Действительно, пусть β — другая плоскость, обладающая этими свойствами. Так как плоскость β отлична от α , то она параллельна α по теореме 3.6. Но плоскости α и β пересекаются, так как проходят через точку A . Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

Теорема 4.2. *Через данную точку к данной плоскости можно провести и при том только одну перпендикулярную прямую.*

Доказательство. Пусть A — данная точка и α — данная плоскость.

Рассмотрим сначала тот случай, когда точка A лежит в плоскости α . Проведем через точку A в плоскости α две различные прямые b и c (рис. 22). Проведем далее через точку A две плоскости, перпендикулярные прямым b и c . Они пересекутся по некоторой пря-

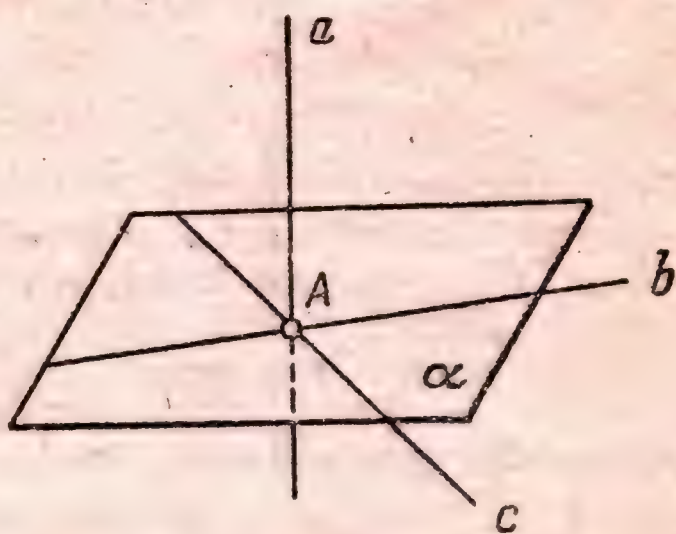


Рис. 22.

мой a . Прямая a перпендикулярна прямым b и c , а следовательно, по теореме 3.4 перпендикулярна плоскости α .

Пусть теперь точка A не лежит в плоскости α . Проведем через какую-нибудь точку A' плоскости α прямую, перпендикулярную плоскости α . Прямая a , проходящая через точку A и параллельная прямой a' , перпендикулярна плоскости α по теореме 3.3.

Прямая a , проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α , единственная. Действительно, допустим, существует другая прямая b , обладающая этим свойством. Так как прямые a и b различны, то по теореме 3.5 они параллельны. Однако прямые a и b пересекаются в точке A . Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

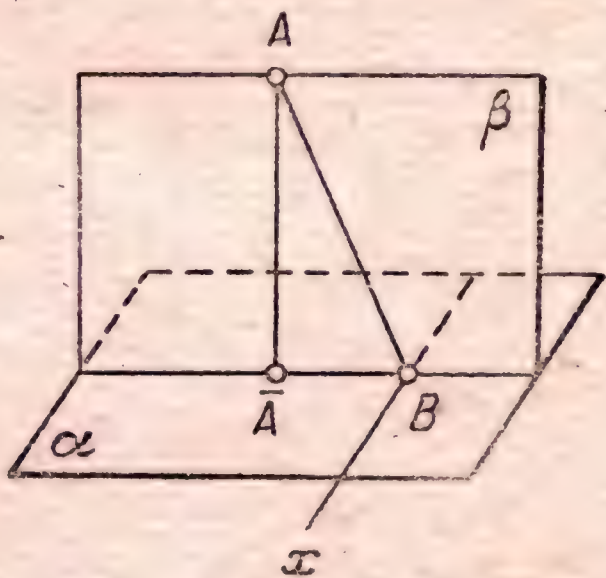


Рис. 23.

Пусть α — плоскость, A — точка, не принадлежащая плоскости α , и $\bar{A}$ — точка в плоскости α (рис. 23).

Отрезок $A\bar{A}$ называется *перпендикуляром*, проведенным из точки A к плоскости α , если прямая $A\bar{A}$ перпендикулярна плоскости α . Пусть B — точка плоскости α , отличная от $\bar{A}$. Отрезок AB называется *наклонной*, проведенной из точки A к плоскости α . Отрезок $\bar{A}B$ называется *проекцией наклонной*.

Теорема 4.3. Пусть $A\bar{A}$ — перпендикуляр, а AB — наклонная, проведенные из точки A к плоскости α . Тогда если прямая x , проходящая в плоскости α через основание наклонной, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной. Обратно, если прямая x перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна ее проекции (рис. 23).

Доказательство. Проведем плоскость β через прямые $A\bar{A}$ и $\bar{A}B$. Прямая AB лежит в плоскости β . Прямая x перпендикулярна $A\bar{A}$, так как прямая $A\bar{A}$ перпендикулярна плоскости α . Если прямая x перпендикулярна прямой $\bar{A}B$, то по теореме 3.4 она перпен-

дикулярна плоскости β . Следовательно, прямая x перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, в частности прямой AB . Первое утверждение доказано.

Если прямая x перпендикулярна AB , то по той же теореме 3.4 она перпендикулярна плоскости β и, следовательно, перпендикулярна прямой $\bar{A}B$. Теорема доказана полностью.

Теорема 4.4. *Перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α , короче любой наклонной, проведенной из той же точки. Бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию.*

Доказательство (рис. 23). Треугольник $A\bar{A}B$ прямоугольный с прямым углом $\bar{A}$. По теореме Пифагора в применении к этому треугольнику

$$AB^2 = A\bar{A}^2 + \bar{A}B^2.$$

Отсюда следует, во-первых, что $AB > A\bar{A}$, т. е. наклонная AB больше перпендикуляра $A\bar{A}$. Во-вторых, чем больше AB , тем больше $\bar{A}B$, т. е. чем больше наклонная, тем больше ее проекция. Теорема доказана.

Расстоянием от точки A до плоскости α называется длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α . Из теоремы 4.4 следует, что расстояние от

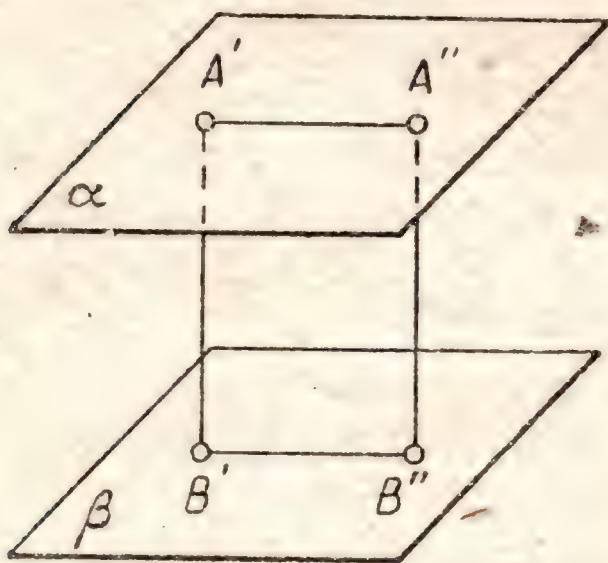


Рис. 24.

точки A до плоскости α есть наименьшее из расстояний точки A до точек плоскости α .

Теорема 4.5. *Пусть α и β — параллельные плоскости. Тогда все точки плоскости α находятся на одном и том же расстоянии от плоскости β .*

Доказательство. Пусть A' и A'' — две различные точки плоскости α .

Проведем из них перпендикуляры $A'B'$ и $A''B''$ к плоскости β (рис. 24). Прямые $A'B'$ и $A''B''$ параллельны по теореме 3.5. Следовательно, по теореме 2.10 отрезки $A'B'$ и $A''B''$ равны. Теорема доказана.

Аналогичная теорема имеет место для прямой и параллельной ей плоскости.

Теорема 4.6. Пусть α — плоскость и a — параллельная ей прямая. Тогда все точки прямой a находятся на одном и том же расстоянии от плоскости α .

Пусть a и b — две скрещивающиеся прямые, A и B — точки на этих прямых. Отрезок AB называется *общим перпендикуляром* скрещивающихся прямых a и b , если прямая AB перпендикулярна прямой a и прямой b .

Теорема 4.7. Скрещивающиеся прямые имеют и притом только один общий перпендикуляр.

Доказательство. Как показано в конце § 2, через прямые a и b проходят две параллельные плоскости α и β . Плоскость α проходит через прямую a и параллельна прямой b , а плоскость β проходит через прямую b и параллельна плоскости α (рис. 25).

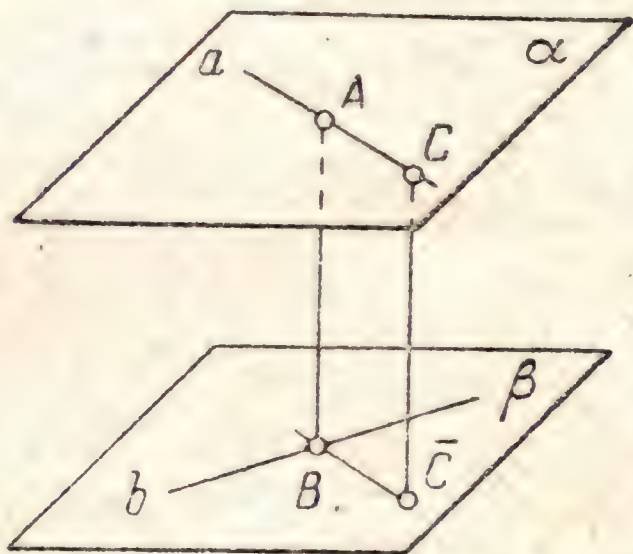


Рис. 25.

Проведем из произвольной точки C прямой a перпендикуляр $CC\bar{}$ к плоскости β . Проведем из точки $C\bar{}$ прямую, параллельную a . Она пересечет прямую b в некоторой точке B . Проведем через точку B прямую, параллельную $CC\bar{}$. Она пересечет прямую a в некоторой точке A . Прямая AB перпендикулярна плоскостям α и β , следовательно, перпендикулярна прямым a и b .

Докажем единственность общего перпендикуляра AB . Допустим, существует еще один общий перпендикуляр $A'B'$. Проведем через точку B' плоскость, перпендикулярную прямой $A'B'$. Эта плоскость содержит прямую b и параллельна прямой a , следовательно, совпадает с плоскостью β . Прямые AB и $A'B'$, будучи перпендикулярны одной плоскости, плоскости β , параллельны. Следовательно, прямые AB и $A'B'$, а значит и прямые AA' , BB' , т.е. прямые a и b , лежат в одной плоскости. Но это противоречит тому, что прямые a и b скрещивающиеся. Теорема доказана.

Упражнения

1. Сколько точек пространства находятся на расстоянии a от трех плоскостей, пересекающихся в одной точке.

2. Треугольник ABC расположен по одну сторону плоскости α ; a , b , c — расстояния вершин треугольника от плоскости α . Доказать, что расстояние центра тяжести треугольника (точки пересечения медиан) от плоскости α равно $\frac{a+b+c}{3}$. Как изме-

няется это расстояние, если вершины A и B треугольника лежат по одну сторону плоскости α , а вершина C по другую сторону.

3. Доказать, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей, состоит из двух плоскостей.

4. Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на плоскости, проходящие через данную прямую, есть окружность.

5. Доказать, что геометрическое место оснований равных наклонных, проведенных из данной точки к данной плоскости, есть окружность.

§ 5. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Пусть α и β — две плоскости, пересекающиеся по прямой s . Проведем через произвольную точку C прямой s плоскость γ , перпендикулярную прямой s (рис. 26). Она пересечет плоскости α и β по прямым a и b . Мы будем называть плоскости α и β *перпендикулярными*, если прямые a и b перпендикулярны. Определяемая таким образом перпендикулярность плоскостей α и β не зависит от выбора точки C , через которую проводится плоскость γ .

Действительно, проведем через точку C' , отличную от C , плоскость γ' , перпендикулярную прямой s . Она пересечет плоскости α и β по прямым a' и b' . Плоскости γ и γ' , будучи перпендикулярными прямой s , параллельны. Отсюда следует параллельность прямых a и a' , b и b' . А по теореме 3.2 перпендикулярность прямых a и b влечет за собой перпендикулярность прямых a' и b' . Утверждение доказано.

Теорема 5.1. *Плоскость β , проходящая через прямую b , перпендикулярную плоскости α , также перпендикулярна плоскости α .*

Доказательство. Пусть s — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β , а C — точка, в которой пересекает прямая b прямую s (рис. 27). Про-

ведем через точку C в плоскости α прямую a , перпендикулярную c . Проведем плоскость γ через прямые a и b . Прямая c перпендикулярна двум различным пересекающимся прямым, лежащим в плоскости γ , именно прямой a и прямой b . Следовательно, плоскость γ перпендикулярна прямой c (теорема 3.4). Так как прямая b

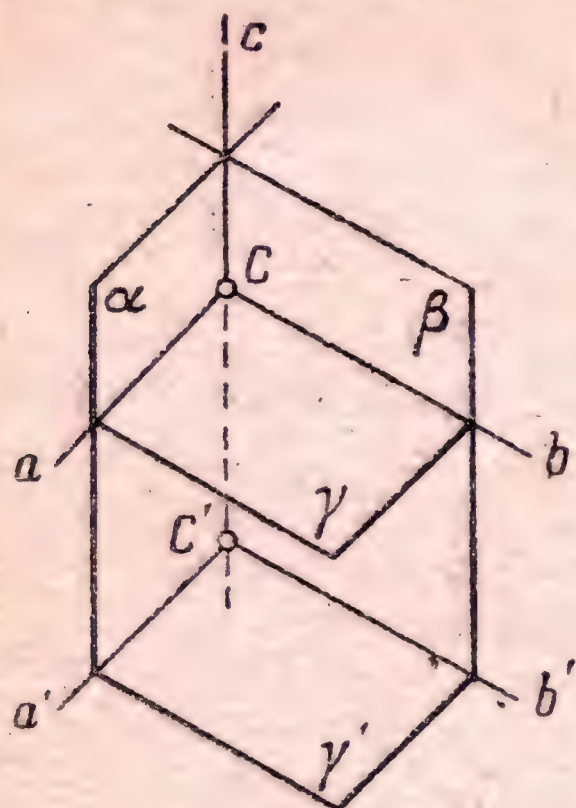


Рис. 26.

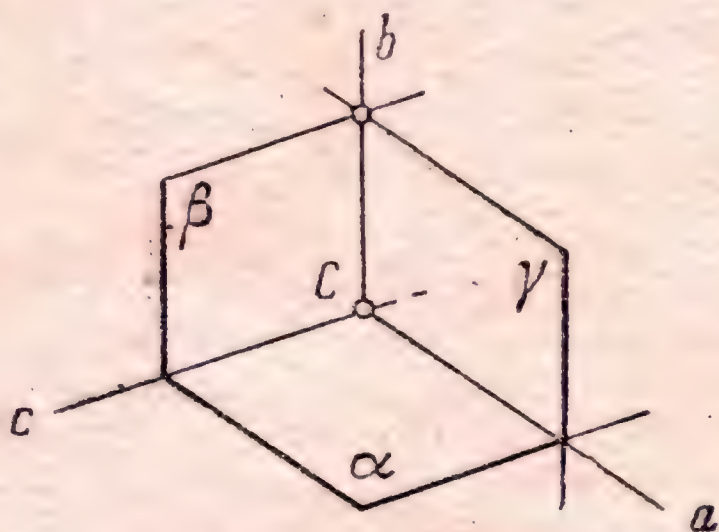


Рис. 27.

перпендикулярна плоскости α , то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α , в частности прямой a . Итак, плоскость γ , перпендикулярная прямой c , пересекает плоскости α и β по перпендикулярным прямым. А это значит, что плоскости α и β перпендикулярны.

Теорема доказана.

Теорема 5.2. Если прямая a и плоскость α перпендикулярны плоскости β , то либо прямая a лежит в плоскости α , либо параллельна плоскости α .

Доказательство.

Пусть c — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 28). Проведем плоскость γ' , перпендикулярную прямой c . Она пересекает плоскости α и β по перпендикулярным прямым a' и b' . Прямая a' , будучи перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости β , именно прямым b' и c , перпендикулярна плоскости β . Следова-

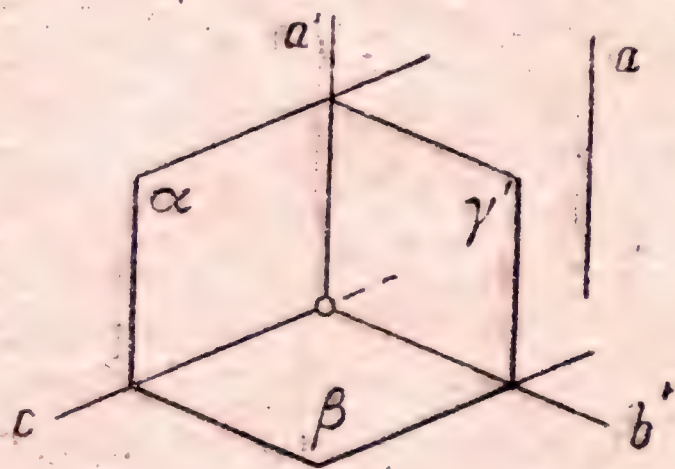


Рис. 28.

тельно, по теореме 3.5 прямые a и a' параллельны. Отсюда по теореме 2.1 заключаем, что прямая a либо лежит в плоскости α , либо параллельна этой плоскости. Теорема доказана.

Теорема 5.3. Пусть α — плоскость, перпендикулярная плоскости β , A — точка в плоскости α . Тогда прямая, перпендикулярная плоскости β , проведенная через точку A , лежит в плоскости α .

Эта теорема непосредственно вытекает из предыдущей.

Теорема 5.4. Пусть α и β — две различные пересекающиеся плоскости и γ — плоскость, перпендикулярная каждой из плоскостей α и β . Тогда плоскость γ перпендикулярна прямой s , по которой плоскости α и β пересекаются.

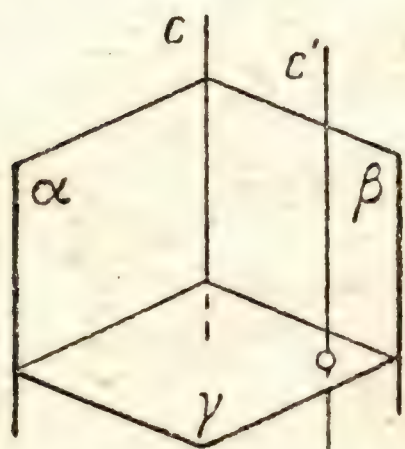


Рис. 29.

Доказательство (рис. 29).

Проведем прямую s' перпендикулярно к плоскости γ через какую-нибудь точку, не лежащую ни в плоскости α , ни в плоскости β . По теореме 5.2 прямая s' параллельна плоскостям α и β . Следовательно,

по теореме 2.8 прямая s' параллельна прямой s , по которой плоскости α и β пересекаются. Теорема доказана.

Теорема 5.5. Пусть α и β — две плоскости, а a и b — перпендикулярные им прямые. Тогда плоскости α и β перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны прямые a и b .

Доказательство. Возьмем точку C вне плоскостей α и β и проведем через точку C прямые a' и b' , перпендикулярные плоскостям α и β соответственно (рис. 30). Прямые a' и b' параллельны a и b . Проведем через прямые a' и b' плоскость γ' . По теореме 5.4 плоскость γ' перпендикулярна прямой s , по которой плоскости α и β пересекаются. Пусть A' и B' — точки пересечения прямых a' и b' с плоскостями α и β , а C' — точка пересечения плоскости γ' с прямой s .

У четырехугольника $CA'C'B'$ углы A' и B' прямые. Если плоскости α и β перпендикулярны, то угол C' тоже прямой. Следовательно, угол C прямой, т. е.

прямые a' и b' перпендикулярны. А это значит, что перпендикулярны параллельные им прямые a и b .

Обратно, если прямые a и b , а следовательно, и прямые a' , b' , перпендикулярны, то угол C четырехугольника прямой. Отсюда следует, что угол C' тоже прямой, т. е. плоскости α и β перпендикулярны. Теорема доказана.

Теорема 5.6. Пусть α — плоскость и b — не перпендикулярная ей прямая. Тогда через прямую b можно провести и притом только одну плоскость β , перпендикулярную плоскости α .

Доказательство. Проведем через произвольную точку прямой b , перпендикулярную к плоскости α , прямую b' (рис. 31). По условию теоремы прямая b' отлична от b . Проведем теперь плоскость β через прямые b и b' . Так как плоскость β проходит через прямую b' , перпендикулярную плоскости α ,

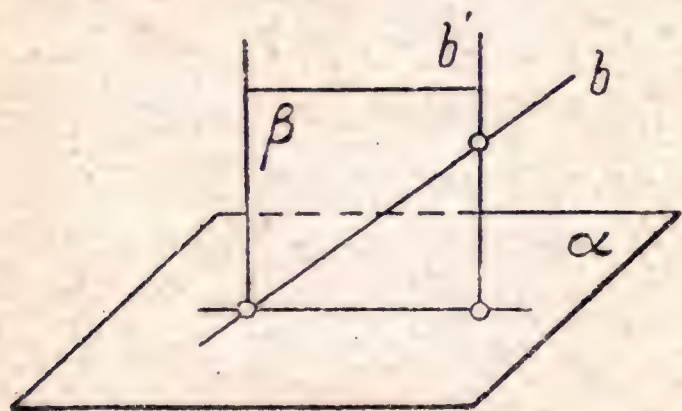


Рис. 31.

то по теореме 5.1 плоскость β перпендикулярна α .

Докажем, что плоскость β , проходящая через прямую b перпендикулярно плоскости α , единственная. Допустим, существует плоскость β' , отличная от β , проходящая через прямую b и перпендикулярная плоскости α . По теореме 5.2 прямая b' лежит в плоскости β' . Таким образом, плоскость β' проходит через различные прямые b и b' . По аксиоме C_3 плоскость β' должна совпадать с β . Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 5.7. Пусть α и β — две не параллельные плоскости. Тогда через произвольную точку C

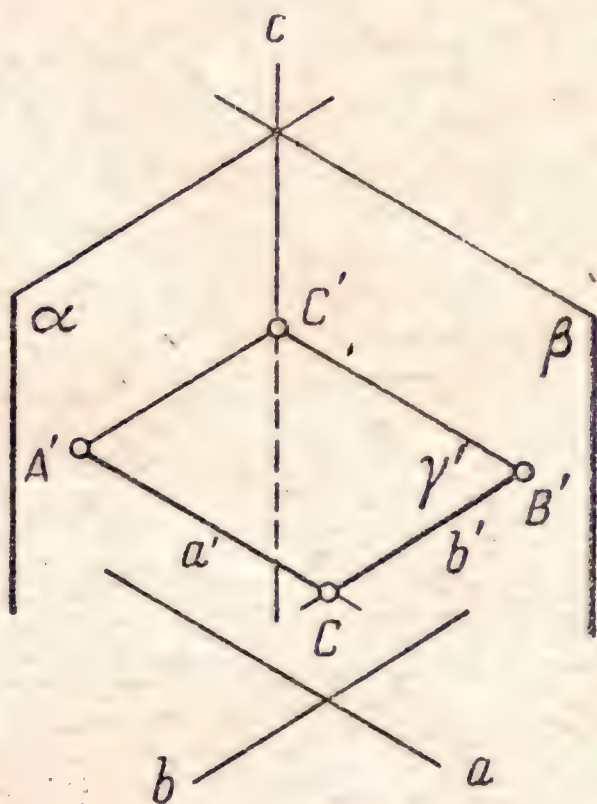


Рис. 30.

можно провести и притом единственную плоскость, перпендикулярную плоскостям α , β .

Доказательство. Так как плоскости α и β не параллельны, то они пересекаются по некоторой прямой c (рис. 32). Проведем через C плоскость γ , перпендикулярную

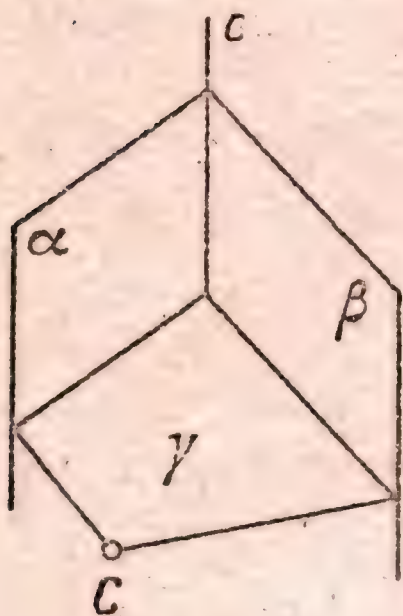


Рис. 32.

прямой c (теорема 4.1). По теореме 5.1 плоскость γ перпендикулярна плоскостям α и β .

Докажем единственность плоскости γ , проходящей через точку C перпендикулярно плоскостям α и β . Допустим, существует плоскость γ' , отличная от γ , обладающая этими свойствами. По теореме 5.4 плоскость γ' перпендикулярна c . Поэтому по теореме 4.1 плоскость γ' должна совпадать с γ . Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 5.8. Если не параллельные плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ , то любая плоскость, проходящая через прямую c пересечения плоскостей α и β , перпендикулярна γ .

Доказательство (рис. 33). По теореме 5.4 прямая c перпендикулярна плоскости γ . По теореме 5.1 любая плоскость, проходящая через прямую c , перпендикулярна плоскости γ . Теорема доказана.

Теорема 5.9. Три взаимно перпендикулярные плоскости пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым.

Доказательство. Пусть a , b , c — прямые, по которым пересекаются β и γ , γ и α , α и β соответственно. По теореме 5.4 прямая c перпендикулярна плоскости γ , следовательно, перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, в частности прямым a и b . Аналогично из перпендикулярности прямой a плоскости α заключаем о перпендикулярности прямых a и b . Теорема доказана.

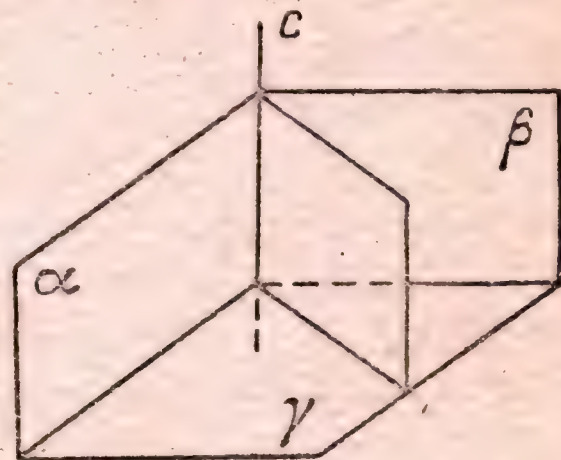


Рис. 33.

§ 6. УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до двух прямых. Угловая мера меньшего из этих углов называется *главным значением* угла между прямыми. Таким образом, главное значение угла между прямыми не больше $90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \right)$. В дальнейшем, говоря об угле между прямыми, мы будем иметь в виду главное значение.

Углом между скрещивающимися прямыми мы будем называть угол между параллельными им пересекающимися прямыми. Покажем, что этот угол не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые.

Действительно, пусть a_1 и a_2 — прямые пересекающиеся в точке A , параллельные данным скрещивающимся прямым. Пусть b_1 и b_2 — другая пара таких прямых, пересекающихся в точке B . Если прямые a_1, a_2, b_1, b_2 лежат в одной плоскости, то наше утверждение следует из теоремы планиметрии об углах с соответственно параллельными сторонами.

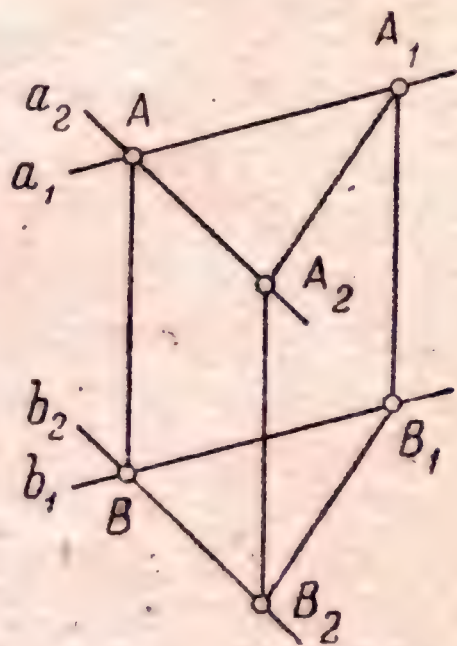


Рис. 34.

Допустим прямые a_1, a_2, b_1, b_2 не лежат в одной плоскости (рис. 34).

Тогда плоскости α и β , в которых лежат прямые a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно, параллельны (теорема 2.4). Отметим на прямых a_1 и a_2 точки A_1 и A_2 , отличные от A , и проведем прямые A_1B_1 и A_2B_2 , параллельные прямой AB . Из равенства треугольников AA_1A_2 и BB_1B_2 заключаем о равенстве углов A и B , а следовательно, о равенстве углов между прямыми a_1, a_2 и b_1, b_2 в смысле главного значения. Теорема доказана.

Мы определили понятие угла для пересекающихся и скрещивающихся прямых. Теперь мы дополним это определение, полагая угол между параллельными или совпадающими прямыми *равным нулю*. Такое

соглашение об углах между параллельными и совпадающими прямыми избавит нас от необходимости выделять специально особые случаи расположения прямых в теоремах об углах.

Теорема 6.1. Пусть a_1 и a_2 — две прямые, b_1 и b_2 — параллельные им прямые. Тогда угол между прямыми a_1 и a_2 равен углу между прямыми b_1 и b_2 .

Доказательство. Если прямые a_1 и a_2 параллельны или совпадают, то прямые b_1 и b_2 либо параллельны, либо совпадают. В обоих случаях углы между прямыми a_1 и a_2 , b_1 и b_2 равны нулю и, следовательно, равны друг другу. Равенство углов в случае пересекающихся прямых установлено выше. В случае скрещивающихся прямых равенство углов следует из определения понятия угла между такими прямыми. Теорема доказана.

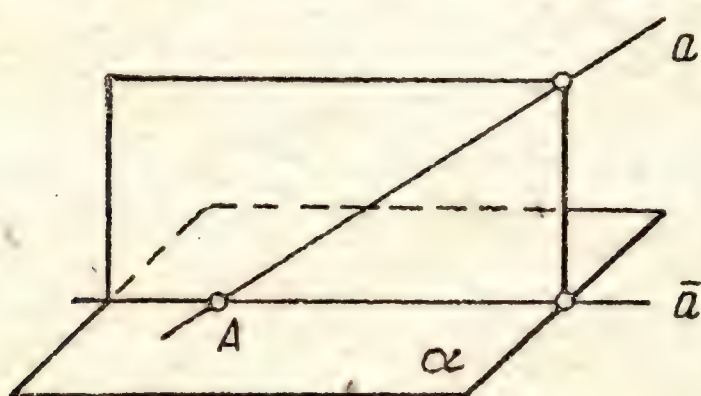


Рис. 35.

Равенство углов в случае пересекающихся прямых установлено выше. В случае скрещивающихся прямых равенство углов следует из определения понятия угла между такими прямыми. Теорема доказана.

Пусть α — плоскость и a — прямая. Угол между прямой a и плоскостью α определяется следующим образом. Если прямая a параллельна плоскости α или лежит в этой плоскости, то полагаем угол между ними равным нулю. Если прямая a перпендикулярна плоскости α , то полагаем угол равным $90^\circ \left(\frac{\pi}{2} \right)$.

Пусть теперь прямая a пересекает плоскость α , но не перпендикулярна этой плоскости. Проведем через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α (рис. 35). Эта плоскость пересечет плоскость α по некоторой прямой $\bar{a}$ — проекции прямой a на плоскость α . Углом между прямой a и плоскостью α мы будем называть угол между прямыми a и $\bar{a}$, т. е. между прямой a и ее проекцией на плоскость α .

Теорема 6.2. Угол между прямой a и плоскостью α дополняет до прямого угол между прямой a и перпендикуляром к плоскости α .

Доказательство. Если прямая a лежит в плоскости α или параллельна этой плоскости, то угол между a и α равен нулю. А угол между прямой a и перпендикуляром к плоскости α равен 90° . Утвержде-

ние теоремы очевидно. Если прямая a перпендикулярна плоскости α , то перпендикуляр к плоскости α либо совпадает с a , либо ей параллелен. Угол между прямой a и плоскостью α равен 90° , а угол между прямой a и перпендикуляром к плоскости α равен нулю. Утверждение теоремы очевидно.

Рассмотрим общий случай. Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке A (рис. 36). Проведем через точку A прямую n , перпендикулярную к плоскости α . Три пря-

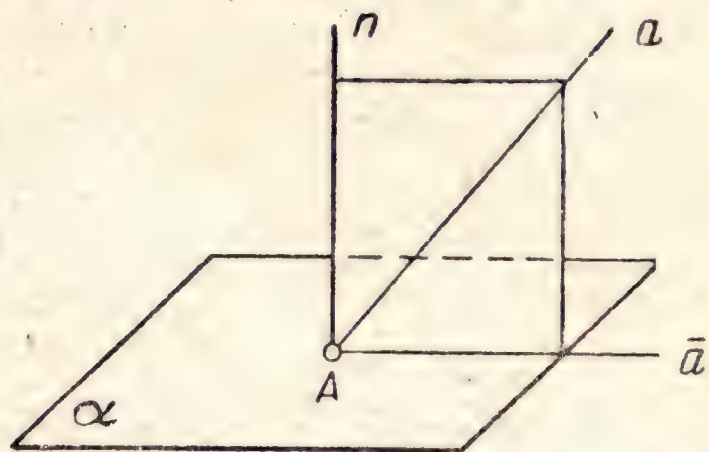


Рис. 36.

мые $\bar{a}$, a и n лежат в одной плоскости — плоскости, проектирующей прямую a на плоскость α . Так как угол между n и $\bar{a}$ равен прямому, то главные значения углов между прямыми a и n , $\bar{a}$ и a дополняют друг друга до 90° . Теорема доказана.

Теорема 6.3. Пусть a и b — параллельные прямые, α и β — параллельные плоскости. Тогда угол между прямой a и плоскостью α равен углу между прямой b и плоскостью β .

Доказательство. Пусть a' и b' — прямые, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно.

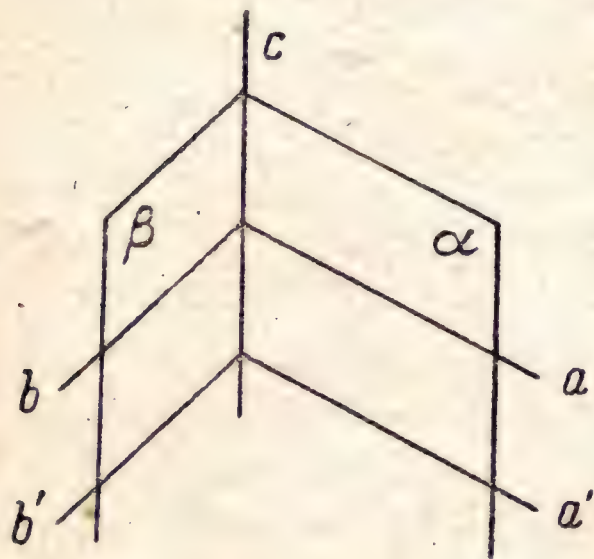


Рис. 37.

Прямые a' и b' либо параллельны, либо совпадают. По теореме 6.1 углы между прямыми a и a' , b и b' равны. Следовательно, дополняющие их до 90° углы тоже равны. По теореме 6.2 отсюда заключаем о равенстве углов между прямой a и плоскостью α , прямой b и плоскостью β . Теорема доказана.

Определим понятие угла между двумя плоскостями α и β . Если плоскости α и β параллельны или совпадают, мы полагаем угол между ними равным нулю. Пусть плоскости α и β не совпадают и не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c

(рис. 37). Проведем плоскость γ , перпендикулярную прямой c . Она пересечет плоскости α и β по прямым a и b . За угол между плоскостями α и β мы принимаем угол, равный углу между прямыми a и b . Определяемый таким образом угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости γ . Действительно, пусть γ' — другая плоскость, перпендикулярная прямой c . Она пересекает плоскости α и β по прямым a' и b' , параллельным a и b . Следовательно, прямые a' и b' образуют тот же угол, что и прямые a , b .

Теорема 6.4. Угол между плоскостями α и β равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям.

Доказательство. Если плоскости α и β параллельны или совпадают, то перпендикулярные им

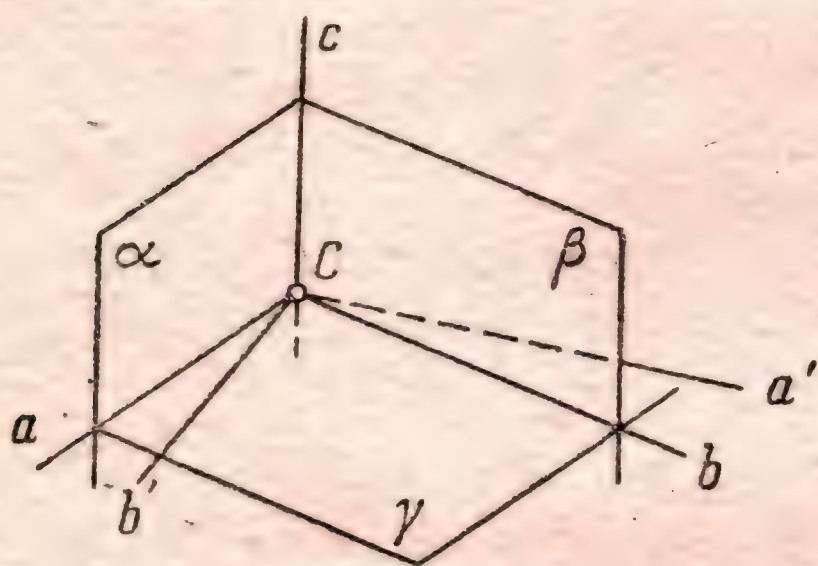


Рис. 38.

прямые a и b тождели-
бо параллельны, либо
совпадают. В этом слу-
чае угол между пло-
скостями и угол между
прямыми равен нулю.
Следовательно, угол
между плоскостями
равен углу между пер-
пендикулярными им
прямыми.

Пусть теперь пло-
скости α и β не совпа-
дают, не параллельны и, следовательно, пересекаются
по некоторой прямой c . Проведем плоскость γ , пер-
пендикулярную прямой c (рис. 38). Она пересечет
плоскости α и β по прямым a и b , а прямую c в точ-
ке C . Проведем через точку C прямые a' и b' , перпен-
дикулярные плоскостям α и β . Они лежат в плоско-
сти γ . По теореме планиметрии об углах с перпенди-
кулярными сторонами заключаем о равенстве углов
между прямыми a и b и прямыми a' и b' . А это и ут-
верждается теоремой. Теорема доказана.

Теорема 6.5. Если плоскость α параллельна
плоскости α' , а плоскость β параллельна плоскости β' ,
то угол между плоскостями α и β равен углу между
плоскостями α' и β' .

Доказательство. Проведем прямую a , перпендикулярную плоскости α . Эта прямая перпендикулярна плоскости α' . Аналогично прямая b , перпендикулярная плоскости β , перпендикулярна плоскости β' . По теореме 6.4 угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям. Следовательно, угол между плоскостями α и β и угол между плоскостями α' и β' равны одному и тому же значению — углу между прямыми a и b . Теорема доказана.

Упражнения

1. Даны три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Чему равен угол между прямыми CA и CB , если эти прямые образуют углы α и β с прямой AB , причем $\alpha + \beta < 90^\circ$.

2. Пусть α — плоскость, a — пересекающая ее прямая и x — произвольная прямая, лежащая в плоскости α . Доказать, что угол между прямыми a и x не меньше угла между прямой a и плоскостью α .

3. Пусть a — прямая и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы, которые она образует с тремя взаимно перпендикулярными прямыми. Доказать, что

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1.$$

4. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы, которые образует прямая с тремя взаимно перпендикулярными плоскостями. Доказать, что

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 2.$$

§ 7. ДВУГРАННЫЕ, ТРЕХГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Пусть α и β — две плоскости, пересекающиеся по прямой c . Прямая c разбивает каждую из плоскостей α и β на две полуплоскости. Отметим в каждой из плоскостей по одной полуплоскости, обозначив их α' и β' (рис. 39). Фигура, образованная полуплоскостями α' и β' , называется *двугранным углом*, а полуплоскости α' и β' называются *гранями* двугранного угла. Прямая c называется *ребром* двугранного угла. Проведем произвольную плоскость γ , перпендикулярную прямой c . Она пересечет полуплоскости α' и β' по полупрямым a' и b' . Угол, образованный полупрямыми a' и b' , называется *плоским углом* двугранного угла. За меру двугранного угла принимают меру соответствующего ему плоского угла. Все плоские углы

двугранного угла равны, и поэтому мера двугранного угла не зависит от выбора плоского угла.

Существенно заметить разницу между величиной угла между плоскостями α и β и величиной двугранного угла между полуплоскостями α' и β' этих плоскостей. Угол между плоскостями всегда не больше прямого. Двугранный угол может иметь любое значение от нуля до 180° . Если двугранный угол меньше или равен 90° , то угол между плоскостями, в которых

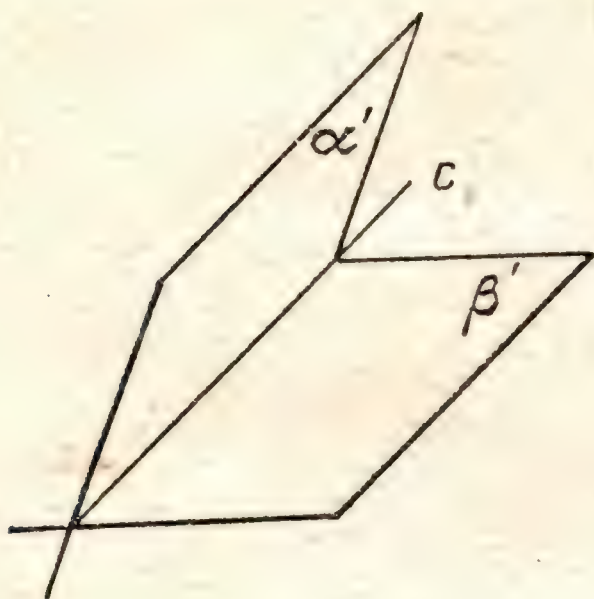


Рис. 39.

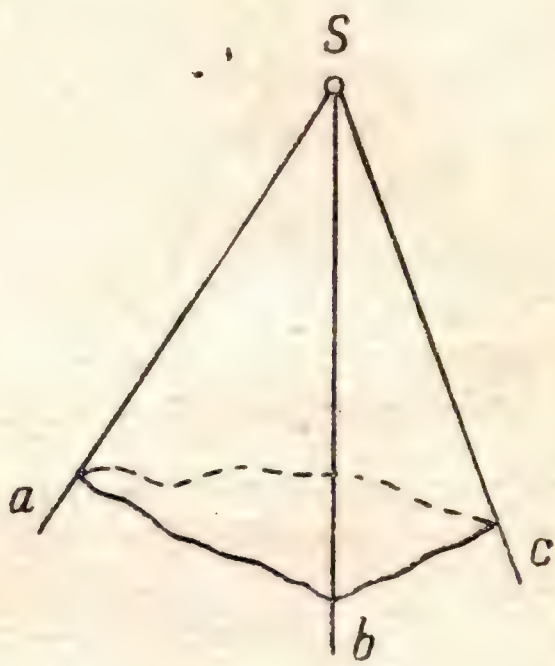


Рис. 40.

лежат грани двугранного угла, равен величине двугранного угла. В противном случае он дополняет двугранный угол до 180° .

Пусть a , b , c — три полупрямые, исходящие из точки S , не лежащие в одной плоскости (рис. 40).

Полупрямые a , b , c образуют три угла: $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ac}$. Фигура, составленная из этих трех углов, называется *трехгранным углом*. Точка S называется *вершиной* трехгранного угла, полупрямые a , b , c называются *ребрами*, а сами плоские углы *гранями*. Плоскости углов $\widehat{ab}$ и $\widehat{ac}$ пересекаются по прямой, содержащей полупрямую a . Полуплоскости этих плоскостей, содержащие полупрямые b и c , образуют двугранный угол. Этот угол называется *двугранным углом трехгранного угла* при ребре a . Его называют также двугранным углом, противолежащим плоскому углу $\widehat{bc}$.

Теорема 7.1. Пусть α, β, γ — плоские углы трехгранного угла и C — двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ . Тогда

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C.$$

Доказательство. Пусть S — вершина трехгранного угла, a, b, c — его ребра, α, β, γ — плоские углы, образованные ребрами b и c , c и a , a и b соответственно, C — двугранный угол при ребре c , т. е.

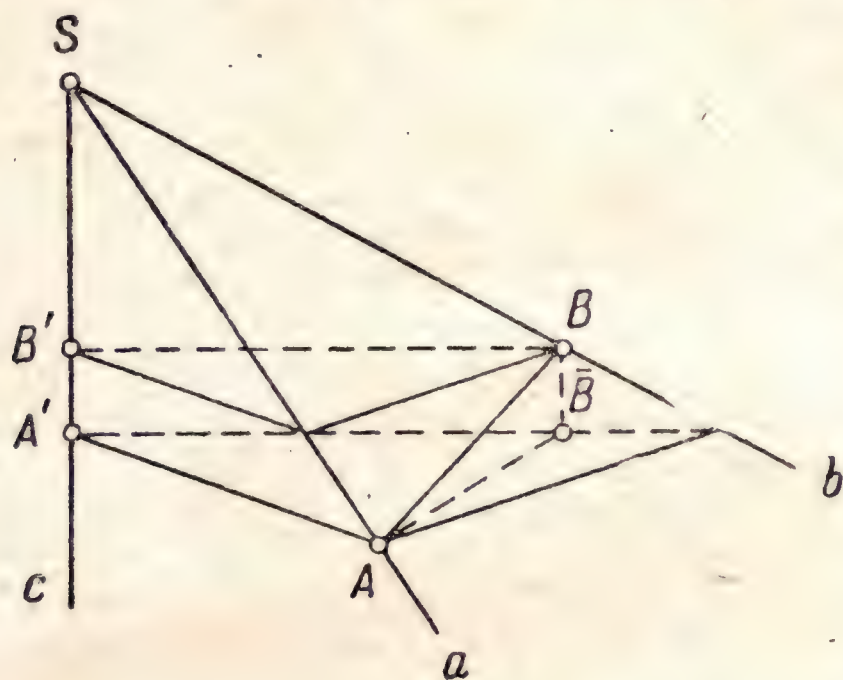


Рис. 41.

двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ (рис. 41). Отложим на ребрах a и b угла отрезки SA и SB единичной длины. По теореме косинусов в применении к треугольнику ASB будем иметь

$$AB^2 = 1 + 1 - 2\cos \gamma.$$

Теперь вычислим длину отрезка AB другим способом. Для этого проведем через точки A и B плоскости, перпендикулярные ребру c . Они пересекут это ребро или его продолжение в точках A' и B' . Пусть $\bar{B}$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на проведенную через точку A плоскость. По теореме косинусов в применении к треугольнику $AA'\bar{B}$ имеем

$$A\bar{B}^2 = AA'^2 + A'\bar{B}^2 - 2AA' \cdot A'\bar{B} \cos C.$$

Но $AA' = \sin \beta$, $A'\bar{B} = BB' = \sin \alpha$. Таким образом,

$$A\bar{B}^2 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2\sin \alpha \sin \beta \cos C.$$

Из прямоугольного треугольника $AB\bar{B}$ по теореме Пифагора

$$AB^2 = A\bar{B}^2 + B\bar{B}^2.$$

Но $B\bar{B} = |\cos \beta - \cos \alpha|$. Таким образом,

$$\begin{aligned} AB^2 &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + (\cos \beta - \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos C = \\ &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos C. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные два выражения для величины AB^2 , получим

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C.$$

Теорема доказана.

Пусть a, b, c — ребра трехгранного угла с вершиной S . Плоскость угла $\widehat{bc}$ разбивает пространство на

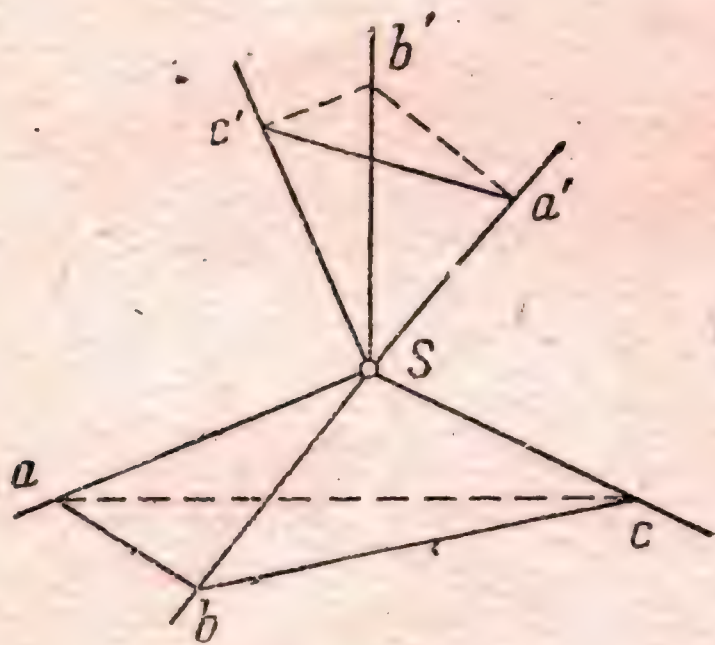


Рис. 42.

два полупространства. В одном из них расположена полупрямая a . Проведем из точки S полупрямую a' перпендикулярно плоскости угла $\widehat{bc}$, направленную в полупространство, дополнительное к тому, в котором лежит полупрямая a . Аналогично построим полупрямые b' и c' , перпендикулярные плоскостям углов $\widehat{ac}$ и $\widehat{ab}$ соответственно. Трехгранный угол, ребрами

которого являются полупрямые a', b', c' , называется *полярным* по отношению к исходному трехгранному углу abc (рис. 42). Легко видеть, что грани полярного угла перпендикулярны ребрам исходного. Свойство полярности трехгранных углов взаимно, т. е. если трехгранный угол $a'b'c'$ полярен трехгранному углу abc , то трехгранный угол abc полярен углу $a'b'c'$. Из свойства углов с перпендикулярными сторонами заключаем, что плоские углы полярного трехгранного угла дополняют соответствующие двугранные углы исходного трехгранного угла до 180° . Именно, пло-

ский угол $\widehat{b's'}$ дополняет до 180° двугранный угол при ребре a и т. д. Аналогично двугранные углы полярного трехгранного угла дополняют соответствующие плоские углы исходного трехгранного угла до 180° . В частности, двугранный угол при ребре a' дополняет до 180° плоский угол $\widehat{bc}$.

Теорема 7.2. Пусть A, B, C — двугранные углы трехгранного угла. Пусть γ — плоский угол, противолежащий двугранному углу C . Тогда

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos \gamma.$$

Эта теорема является прямым следствием теоремы 7.1 в применении ее к трехгранному полярному углу.

Теорема 7.3. Пусть α, β, γ — плоские углы трехгранного угла, а A, B, C — противолежащие им двугранные углы. Тогда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

Доказательство. Отложим на ребре c трехгранного угла отрезок SC единичной длины (рис. 43). Опустим из точки C перпендикуляр на плоскость угла $\widehat{ab}$. Пусть $\bar{C}$ — основание этого перпендикуляра. Проведем из точки C плоскости, перпендикулярные ребрам a и b , и обозначим через A и B точки пересечения этих плоскостей с ребрами a и b или их продолжением.

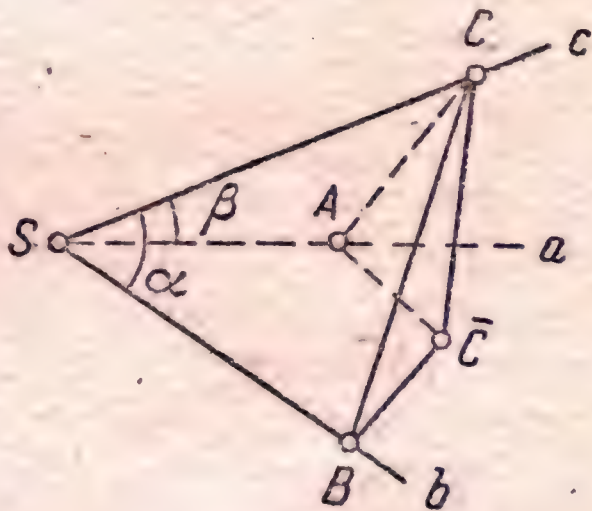


Рис. 43.

Вычислим длину перпендикуляра $C\bar{C}$. Из прямоугольного треугольника SCB с прямым углом B получим

$$CB = 1 \cdot \sin \alpha.$$

Теперь из прямоугольного треугольника $CB\bar{C}$ с прямым углом $\bar{C}$ находим длину перпендикуляра $C\bar{C}$. Именно,

$$C\bar{C} = CB \sin B = \sin \alpha \sin B.$$

Длину перпендикуляра $C\bar{C}$ можно найти иначе, используя при этом прямоугольники ACS и $CA\bar{C}$. При этом получается

$$C\bar{C} = \sin \beta \sin A.$$

Сравнивая выражения для отрезка $C\bar{C}$, находим

$$\sin \alpha \sin B = \sin \beta \sin A.$$

Отсюда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B}.$$

Аналогично получается соотношение

$$\frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

Теорема доказана.

Теорема 7.4. *У трехгранного угла каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.*

Доказательство. Пусть α , β , γ — плоские углы трехгранного угла. Покажем, что $\gamma < \alpha + \beta$. Применяя теорему 7.1 к трехгранному углу, получим

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C.$$

Так как $\cos C > -1$, а $\sin \alpha$ и $\sin \beta$ положительны, то имеет место неравенство

$$\cos \gamma > \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Правая часть этого неравенства есть не что иное, как $\cos(\alpha + \beta)$. Таким образом, $\cos \gamma > \cos(\alpha + \beta)$. Как известно, при возрастании угла от 0° до 180° косинус угла убывает. Отсюда следует, что $\gamma < \alpha + \beta$. Теорема доказана.

Пусть из точки S исходят полупрямые $a_1, a_2, \dots, \dots, a_n$, причем никакие три последовательные полупрямые $a_1a_2a_3, a_2a_3a_4, \dots, a_na_1a_2$ не лежат в одной плоскости. Фигура, составленная из плоских углов $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_na_1$, называется **многогранным углом** (рис. 44). Точка S называется **вершиной** многогранного угла, а полупрямые $a_1, a_2, \dots, a_n$ — его **ребрами**. Многогранный угол называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону плоскости любого его плоского угла.

Теорема 7.5. *У выпуклого многогранного угла сумма плоских углов меньше 360° .*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — ребра выпуклого многогранного угла с вершиной S . Отметим на сторонах a_1 и a_2 угла точки A_1 и A_2 . Возьмем теперь точку A_3 на стороне a_3 , достаточно близкую к вершине S (рис. 44), и проведем через точки A_1, A_2, A_3 плоскость α . При достаточной близости точки A_3 к S плоскость α пересекает все ребра $a_1, a_2, \dots, a_n$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — точки пересечения плоскости α с ребрами угла S . Из выпуклости многогранного угла S следует выпуклость многоугольника P с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$.

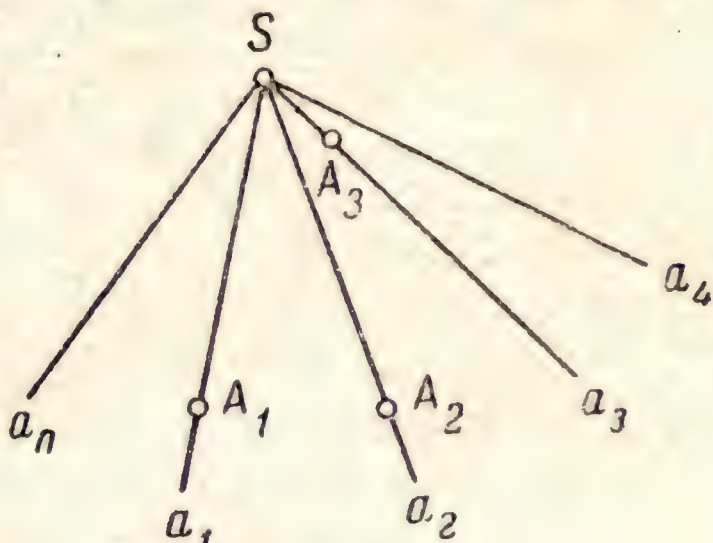


Рис. 44.

Рассмотрим многогранный угол S и трехгранные углы с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$ (рис. 45). Сумма

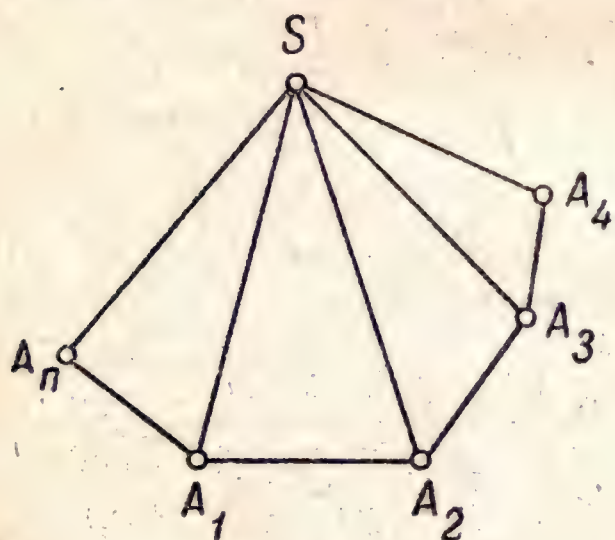


Рис. 45.

всех их плоских углов составлена из суммы углов многоугольника P , т. е. $180^\circ n - 360^\circ$, и суммы углов треугольников $A_1A_2S, A_2A_3S, \dots, A_nA_1S$, т. е. $180^\circ n$. Итак, сумма всех плоских углов равна $2 \cdot 180^\circ n - 360^\circ$.

У каждого трехгранного угла A_k угол, принадлежащий многоугольнику P , меньше суммы двух других углов. Поэтому найденная выше сумма всех плоских углов больше $(180^\circ n - 360^\circ) \cdot 2 + \vartheta$, где ϑ — сумма плоских углов при вершине S , т. е.

$$(180^\circ n - 360^\circ) \cdot 2 + \vartheta < 2 \cdot 180^\circ n - 360^\circ.$$

Отсюда

$$\vartheta < 360^\circ.$$

Теорема доказана.

Упражнения

1. Три прямые a, b, c , не лежащие в одной плоскости, пересекаются в точке O . Точка O разбивает каждую из прямых на две полупрямые. Беря по одной полупрямой на каждой из прямых, можно образовать восемь трехгранных углов. Выразить плоские и двугранные углы этих трехгранных углов через плоские и двугранные углы одного из них.

2. Пусть α, β, γ — плоские, а A, B, C — противолежащие им двугранные углы трехгранного угла. Пусть φ — угол между ребром двугранного угла C и плоскостью угла γ . Доказать, что

$$\sin \varphi = \sin \beta \sin A = \sin \alpha \sin B.$$

3. В трехгранном угле два плоских угла равны α , а двугранный угол, заключенный между ними, равен φ . Найти остальные углы.

4. У трехгранного угла один двугранный угол прямой, а прилежащие к нему плоские углы равны α и β . Найти остальные углы.

5. У трехгранного угла задан один плоский угол и два двугранных прилежающих к этому плоскому, причем один из этих двугранных углов прямой. Найти остальные углы.

§ 8. ДВИЖЕНИЯ И ДРУГИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Понятие движения в пространстве вводится так же, как и на плоскости. Именно, под движением мы понимаем одно-однозначное отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками. Это значит, что если X и Y — две произвольные точки пространства и X', Y' — соответствующие им точки, то $XY = X'Y'$. Движение в пространстве обладает свойствами, аналогичными свойствам движения на плоскости. В частности, *при движении прямые переходят в прямые и сохраняется порядок точек на прямой*. Это значит, что если три точки A, B, C лежат на прямой и точка B расположена между A и C , то соответствующие им точки A', B', C' также лежат на прямой, причем точка B' лежит между A' и C' . Доказательство этого свойства для движения в пространстве ничем не отличается от соответствующего доказательства для движения на плоскости. Поэтому мы его приводить не будем.

При движении в пространстве плоскости переходят в плоскости. Докажем это свойство. Пусть α — плоскость и A, B, C — три ее точки, не лежащие на одной

прямой. При движении эти точки перейдут в точки A' , B' , C' , также не лежащие на одной прямой. Пусть α' — плоскость, проходящая через точки A' , B' , C' . Покажем, что плоскость α при рассматриваемом движении переходит в плоскость α' .

Пусть X — произвольная точка плоскости α . Проведем через точку X прямую в плоскости α , пересекающую треугольник ABC в двух точках P и Q . Точки P' и Q' , соответствующие P и Q , принадлежат треугольнику $A'B'C'$, а следовательно и плоскости α' . Так как прямая PQ переходит в прямую $P'Q'$, а точка X лежит на прямой PQ , то соответствующая ей точка X' лежит на прямой $P'Q'$, а значит и на плоскости α' . Итак, каждая точка X плоскости α переходит при движении в некоторую точку X' плоскости α' .

Покажем теперь, что каждая точка X' плоскости α' является образом некоторой точки X плоскости α . Для этого проведем через точку X' произвольную прямую, пересекающую треугольник $A'B'C'$ в двух точках P' , Q' . Пусть P и Q — точки, образами которых являются точки P' и Q' . Прямая PQ при движении переходит в прямую $P'Q'$. Следовательно, точка X' является образом одной из точек прямой PQ , а значит и плоскости α . Утверждение доказано.

Подобно тому, как в планиметрии, с помощью движения определяется равенство пространственных фигур. Именно, две фигуры F и F' называются *равными*, если они совмещаются движением, т. е. существует движение, при котором фигура F переходит в фигуру F' . Буквально так же, как и в планиметрии, доказывалось, что фигура, равная отрезку, есть равный ему отрезок; фигура, равная треугольнику, есть равный ему треугольник.

Подобно тому, как на плоскости вводится понятие симметрии относительно прямой, в пространстве вводится понятие симметрии относительно плоскости. Именно, пусть α — произвольная плоскость и X — произвольная точка пространства. Проведем через точку X прямую a , перпендикулярную плоскости α . Она пересечет плоскость α в некоторой точке A . Построим теперь точку X' по следующему правилу. Если точка X лежит на плоскости α , то X' совпадает с X .

Если же точка X не лежит на плоскости α , то X' лежит на прямой a в другом полупространстве относительно плоскости α , причем расстояния AX и AX' равны (рис. 46). Точка X' называется *симметричной* точке X относительно плоскости α . Отображение пространства на себя, при котором точке X сопоставляется точка X' , симметричная относительно плоскости α , называется *преобразованием симметрии* или

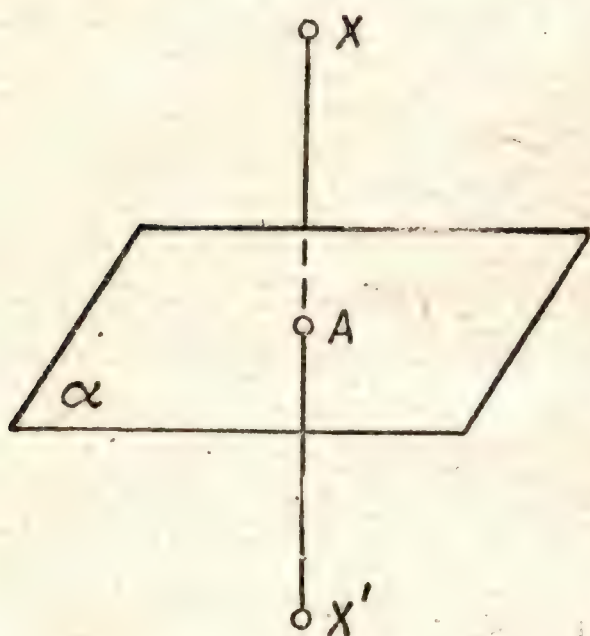


Рис. 46.

зеркальным отражением относительно плоскости α .

Так же как и зеркальное отражение относительно прямой на плоскости, зеркальное отражение относительно плоскости в пространстве есть движение. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что зеркальное отражение в пространстве относительно плоскости α для каждой плоскости β , перпендикулярной α , сводится к зер-

кальному отражению относительно прямой, по которой плоскость α пересекает плоскость β .

Преобразование симметрии относительно данной точки в пространстве определяется дословно так же, как и на плоскости. Так же как и на плоскости, *преобразование симметрии относительно точки в пространстве есть движение*. Для доказательства достаточно заметить, что преобразование симметрии в пространстве относительно данной точки O в каждой плоскости α , проходящей через точку O , сводится к преобразованию симметрии в этой плоскости относительно той же точки O .

С помощью понятия симметрии относительно плоскости и относительно точки вводятся понятия *плоскости симметрии* и *центра симметрии* для пространственных фигур подобно тому, как для плоских фигур определяются оси симметрии и центр симметрии.

Движение называется *параллельным переносом* или *сдвигом*, если выполняется следующее условие. Каковы бы ни были точки X и Y , если соответствующие им точки — X' , Y' , то либо четыре точки X , Y ,

X' , Y' лежат на одной прямой, либо они являются вершинами параллелограмма, причем $XU \parallel X'Y'$, а $XX' \parallel YY'$. При параллельном переносе точки пространства смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние.

Движение называется *вращением* около прямой a , если при этом движении точки прямой a остаются неподвижными. Вращение называется *собственным*, если оно не сводится к зеркальному отражению относительно плоскости, проходящей через прямую a .

Дословно, так же как на плоскости, определяется *преобразование подобия* в пространстве, а также простейшее преобразование подобия — *гомотетия*. Так же как и на плоскости, любое преобразование подобия в пространстве получается последовательным применением гомотетии и движения. Преобразование подобия в пространстве переводит прямые в прямые, плоскости в плоскости, сохраняет углы между прямыми и плоскостями.

Фигура F' , в которую переходит фигура F , при преобразовании подобия называется *подобной* F . Фигура, подобная треугольнику, есть подобный ему треугольник. Расстояния между соответствующими точками подобных фигур находятся в одинаковом отношении, равно коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Последнее утверждение очевидно для треугольника, а следовательно, верно для любой фигуры, допускающей разбиение на треугольники.

До сих пор шла речь о различных преобразованиях пространства в себя. Сейчас мы рассмотрим одно важное преобразование одной плоскости в другую, называемое проек-

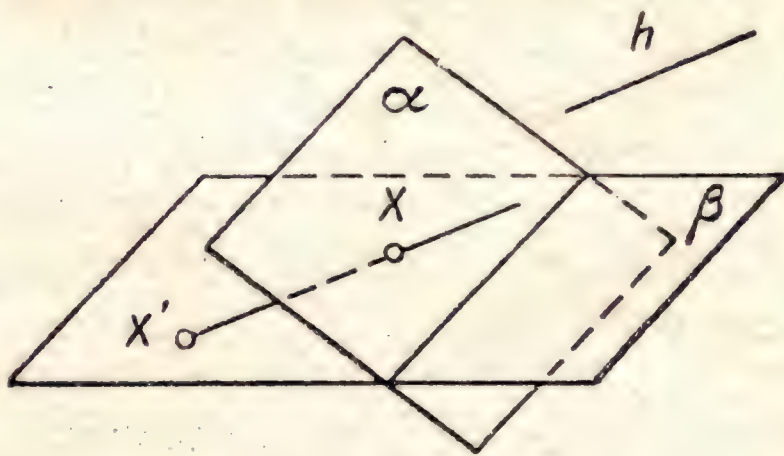


Рис. 47.

тированием. Пусть α и β — две любые плоскости и h — прямая, пересекающая каждую из этих плоскостей (рис. 47). Пусть X — произвольная точка плоскости α . Проведем через точку X прямую, параллель-

ную прямой h . Она пересечет плоскость β в некоторой точке X' . Отображение плоскости α на плоскость β , при котором каждой точке X сопоставляется указанным образом точка X' , называется *параллельным проектированием* плоскости α на плоскость β . Параллельное проектирование, очевидно, является одно-однозначным отображением. Если проектирующие прямые перпендикулярны плоскости β , то проектирование называется *ортогональным*.

При параллельном проектировании плоскости α на плоскость β прямые переходят в прямые и сохраняется порядок точек на прямой. Прямые параллельные переходят в прямые параллельные, а прямые пересекающиеся в прямые пересекающиеся. Сохраняется отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых. Доказательство этих свойств достаточно просто и предоставляется читателю.

Пусть F — фигура в плоскости α . Когда точка X описывает фигуру F , соответствующая ей точка X' при параллельном проектировании описывает фигуру $\bar{F}$ в плоскости β . Фигура $\bar{F}$ называется *проекцией* фигуры F .

Теорема. *Площадь фигуры F и площадь ее ортогональной проекции $\bar{F}$ связаны соотношением*

$$\bar{S} = S \cos \varphi,$$

где φ — угол между плоскостями, в которых лежат фигура F и ее проекция $\bar{F}$.

Доказательство. Мы ограничимся случаем, когда фигура F допускает разбиение на треугольники. В этом случае, очевидно, достаточно доказать, что теорема верна для треугольника. Итак, пусть F есть треугольник. Обозначим через α плоскость, в которой лежит F , а через β — плоскость, на которую проектируется F . Если плоскость α параллельна β , утверждение теоремы очевидно, так как фигура $\bar{F}$ равна F и получается из F параллельным переносом в направлении, перпендикулярном плоскостям.

Пусть плоскость α не параллельна β и пересекает ее по некоторой прямой s . Не ограничивая общности, можно считать, что одна сторона треугольника F па-

параллельна прямой s . Этого можно всегда добиться разбиением треугольника F на два треугольника. Более того, можно считать, что одна сторона треугольника F просто лежит на прямой a . Этого можно добиться переходом от плоскости β к плоскости β' , параллельной β .

Итак, теорему достаточно доказать для случая, когда фигура F есть треугольник с основанием на прямой s , по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 48). В этом случае оба треугольника F и $\bar{F}$ имеют общее основание на прямой s , а их высоты AB и $\bar{A}B$ связаны соотношением $\bar{A}B = AB \cos \varphi$. Соответственно для их площадей получается $\bar{S} = S \cos \varphi$. Теорема доказана.

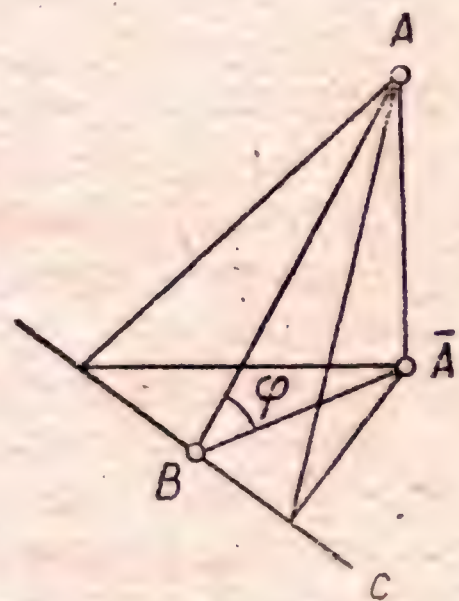


Рис. 48.

Упражнения

1. Пусть A — точка, a — проходящая через нее прямая и α — плоскость, проходящая через прямую a . Точка A разбивает прямую a на две полупрямые, обозначим через a' одну из них. Прямая a разбивает плоскость α на две полуплоскости, обозначим одну из них через α' . Плоскость α разбивает пространство на два полупространства, обозначим через E'_α одно из этих полупространств. Аналогично построим точку B , полупрямую b' , полуплоскость β' и полупространство E'_β .

Доказать, что существует движение, при котором точка A переходит в точку B , полупрямая a' в полупрямую b' , полуплоскость α' в полуплоскость β' и полупространство E'_α в полупространство E'_β .

2. Доказать, что два последовательных преобразования симметрии относительно точек O_1 и O_2 сводятся к параллельному переносу в направлении прямой O_1O_2 на отрезок, равный $2 \cdot O_1O_2$.

3. Доказать, что два последовательных зеркальных отражения относительно параллельных плоскостей сводятся к параллельному переносу в направлении, перпендикулярном этим плоскостям, на расстояние, равное удвоенному расстоянию между плоскостями.

4. Доказать равенство двух трехгранных углов, если плоские углы одного угла равны плоским углам другого, или двугранные углы одного угла равны двугранным углам другого.

5. Доказать, что любой треугольник можно получить как ортогональную проекцию правильного треугольника.

§ 9. ПРОСТЕЙШИЕ ТЕЛА. ПРИЗМА И ПИРАМИДА

Пусть G — фигура на плоскости α . Точка X фигуры G называется *внутренней точкой*, если все достаточно близкие к X точки плоскости α принадлежат фигуре G . Это значит, существует такое положительное число ε , что все точки плоскости α , расстояния которых от точки X меньше ε , принадлежат фигуре G . Фигура G называется *областью*, если каждая ее точка является внутренней и любые две ее точки можно соединить ломаной, целиком принадлежащей фигуре G . Например, круг без ограничивающей его окружности есть область.

Пусть G — область на плоскости α . Точка X плоскости α называется *граничной точкой* для области G , если найдутся сколь угодно близкие к X точки, принадлежащие фигуре G , и точки, не принадлежащие ей. Это значит, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдутся точки на расстоянии, меньшем ε , от точки X , принадлежащие фигуре G , и точки, не принадлежащие фигуре G . Граничные точки образуют *границу* области G . В приведенном выше примере окружность, ограничивающая круг, состоит из граничных точек. Присоединяя к области G ее граничные точки, мы получим новую фигуру $\bar{G}$. Она называется *замкнутой областью*.

Внутренние точки выпуклого многоугольника, как мы их определили в планиметрии, образуют область. Присоединяя к этой области сам многоугольник, мы получим замкнутую область. Эту область мы называли *пополненным многоугольником*. В настоящем параграфе, так же как и в следующем, слово «многоугольник» будет употребляться в смысле «пополненный многоугольник».

Дословно, так же как для плоских фигур, определяются понятие внутренней точки пространственной фигуры, понятие пространственной области и ее границы. Мы не будем повторять этих определений. Замкнутая пространственная область называется *телом*. Тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников, называется *многогранником*. Многоугольники, ограничивающие многогранник, на-

зываются *гранями* многогранника. Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости каждой его грани. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани — равные правильные многоугольники и многогранные углы в вершинах равны. Существует только пять пра-

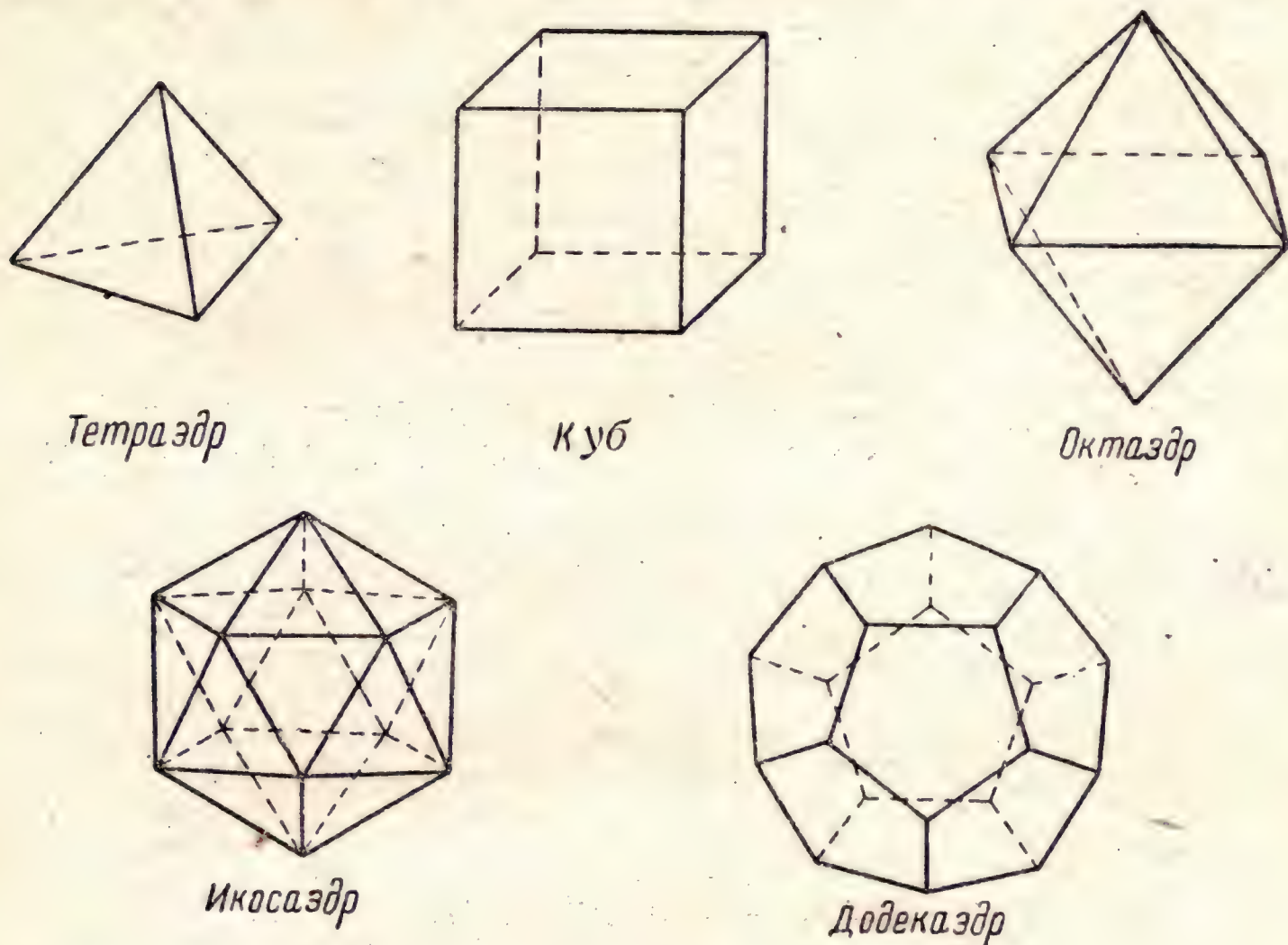


Рис. 49.

вильных выпуклых многогранников: *тетраэдр*, *куб*, *октаэдр*, *додекаэдр* и *икосаэдр* (рис. 49). В настоящем параграфе мы рассмотрим простейшие многогранники — призмы и пирамиды.

Пусть α и α' — две параллельные плоскости и h — прямая, пересекающая эти плоскости. Пусть P — выпуклый многоугольник в плоскости α и $A_1, A_2, \dots, A_n$ — его вершины. Проведем через каждую точку X многоугольника P прямую, параллельную прямой h , и обозначим через X' точку пересечения ее с плоскостью α' (рис. 50). Отрезки XX' заполняют некоторый многогранник. Этот многогранник называется *призмой*. Его граница состоит из многоугольника P , равного ему многоугольника P' в плоскости α' и параллелограммов $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \dots$

Многоугольники P и P' называются *основаниями* призмы, а параллелограммы — *боковыми гранями*. Отрезки $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ... называются *боковыми ребрами* призмы. Призма называется *прямой*, если ее бо-

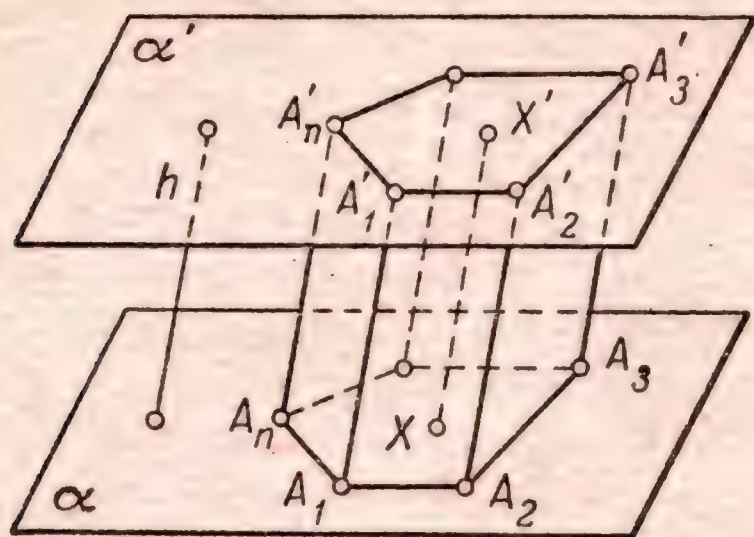


Рис. 50.

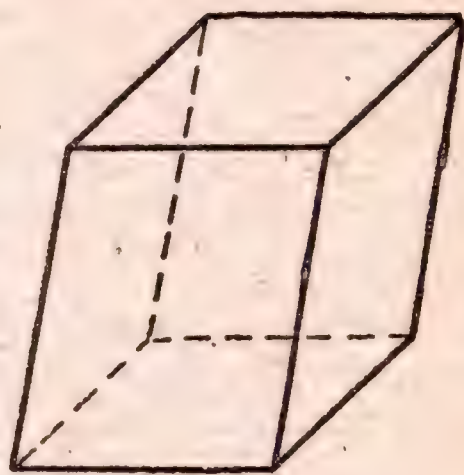


Рис. 51.

ковые ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется *наклонной*.

Если основание P призмы есть параллелограмм, то она называется *параллелепипедом* (рис. 51). У парал-

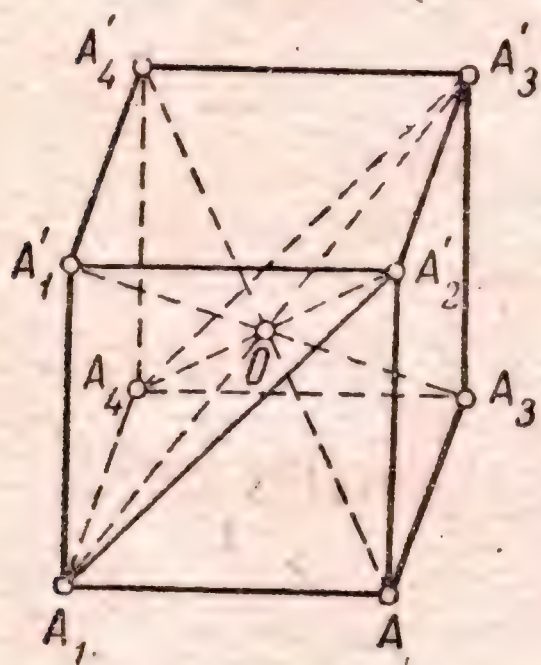


Рис. 52.

лелепипеда все грани параллелограммы. Прямой параллелепипед, у которого основанием служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. У прямоугольного параллелепипеда все грани прямоугольники. Диагональю параллелепипеда называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани. У параллелепипеда четыре диагонали $A_1A'_3$, $A_2A'_4$, $A_3A'_1$ и $A_4A'_2$ (рис. 52).

Теорема 9.1. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.*

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь две диагонали параллелепипеда, например $A_1A'_3$ и $A_4A'_2$ (рис. 52). Так как четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $A_2A'_2A'_3A'_4$ — параллелограммы, то четырехуголь-

ник $A_4A_1A_2'A_3'$ тоже параллелограмм. Диагонали параллелепипеда A_1A_3' и A_4A_2' являются диагоналями этого параллелограмма. Поэтому они пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Аналогично доказывается, что диагонали A_1A_3' и A_2A_4' , а также диагонали A_1A_3' и A_3A_1' пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Отсюда заключаем, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Теорема доказана.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*.

Теорема 9.2. *У параллелепипеда противоположные грани параллельны и равны.*

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь две противоположные грани параллелепипеда, например $A_1A_2A_2'A_1'$ и $A_3A_4A_4'A_3'$ (рис. 52). Так как все грани параллелепипеда параллелограммы, то прямая A_1A_2 параллельна прямой A_3A_4 , а прямая A_1A_1' параллельна прямой A_4A_4' . Отсюда следует, что плоскости рассматриваемых граней параллельны (теоремы 2.1 и 2.4). Из того, что грани параллелепипеда суть параллелограммы, следует, что все отрезки A_1A_4 , $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ и A_2A_3 параллельны и равны. Отсюда заключаем, что грань $A_1A_2A_2'A_1'$ совмещается параллельным переносом вдоль ребра A_1A_4 с гранью $A_4A_3A_3'A_4'$. Следовательно, эти грани равны. Аналогично доказывается параллельность и равенство любых двух противоположных граней параллелепипеда. Теорема доказана.

Длины не параллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами*. У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера, так как в любой четверке его ребер есть параллельные ребра, а параллельные ребра имеют одинаковые длины.

Теорема 9.3. *В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его линейных размеров.*

Доказательство (рис. 53). Из прямоугольного треугольника ACC' по теореме Пифагора

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Отсюда

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

Ребра AB , BC и CC' не параллельны, а следовательно, их длины являются линейными размерами параллелепипеда. Теорема доказана.

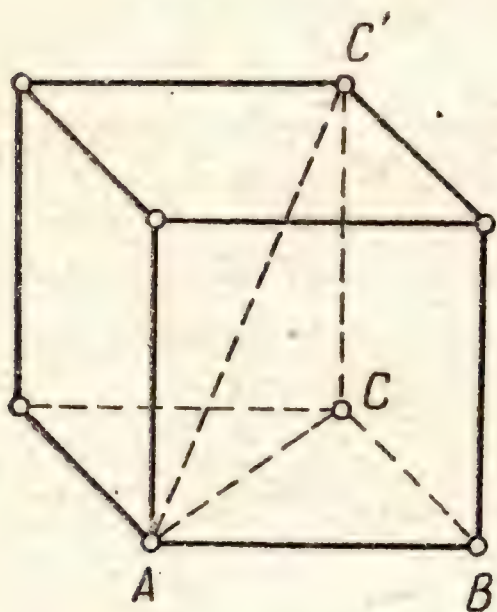


Рис. 53.

Боковой поверхностью призмы (точнее, площадью боковой поверхности) называется сумма площадей боковых граней. *Полная поверхность* призмы состоит из боковой поверхности и площадей оснований.

Теорема 9.4. Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т. е. длину боковых ребер.

Доказательство. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Основания этих прямоугольников являются сторонами многоугольника, лежащего в основании призмы, а высоты равны длине боковых ребер. Отсюда следует, что боковая поверхность призмы равна

$$S = a_1l + a_2l + \dots + a_nl = pl,$$

где p — периметр основания призмы, а l — длина боковых ребер. Теорема доказана.

Пусть P — выпуклый многоугольник в плоскости α и S — точка, не принадлежащая плоскости α . Соединим каждую точку X многоугольника P с точкой S отрезком XS . Отрезки XS заполняют некоторый многогранник. Этот многогранник называется *пирамидой*

(рис. 54). Пирамида называется n -угольной, если P есть n -угольник. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром*. Многоугольник P называется *основанием* пирамиды, а точка S *вершиной* пирамиды. *Высотой* пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из ее вершины S на плоскость α , в которой лежит основание. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — вершины многоугольника P , лежащего в основании пирамиды. Тогда треугольники $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots$ называются *боковыми гранями* пирамиды, а отрезки $A_1S, A_2S, \dots$ — *боковыми ребрами*.

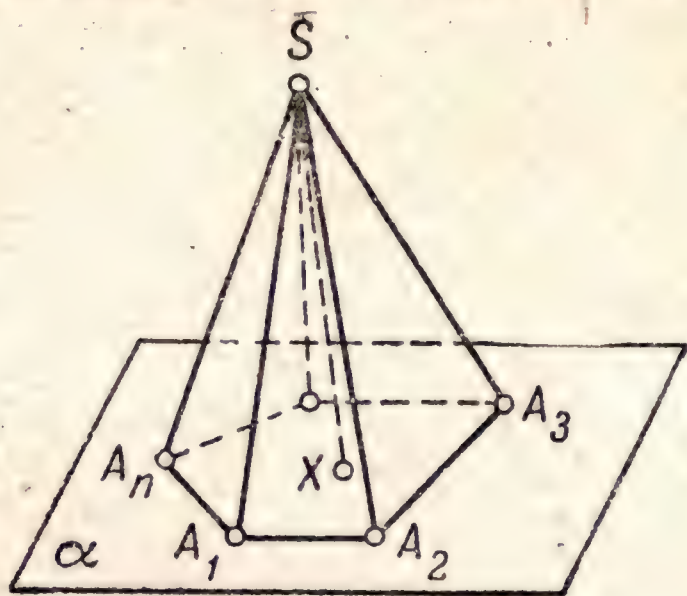


Рис. 54.

Теорема 9.5. *Плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая ее, отсекает подобную пирамиду.*

Доказательство. Пусть S — вершина пирамиды, α — плоскость ее основания и α' — секущая плоскость (рис. 55). Возьмем две произвольные точки X и Y на основании пирамиды. Плоскость α' пересекает отрезки XS и YS в точках X' и Y' . Прямые XU и $X'Y'$ параллельны, так как лежат в одной плоскости, плоскости треугольника XYS , и не пересекаются. По известной теореме планиметрии отношения

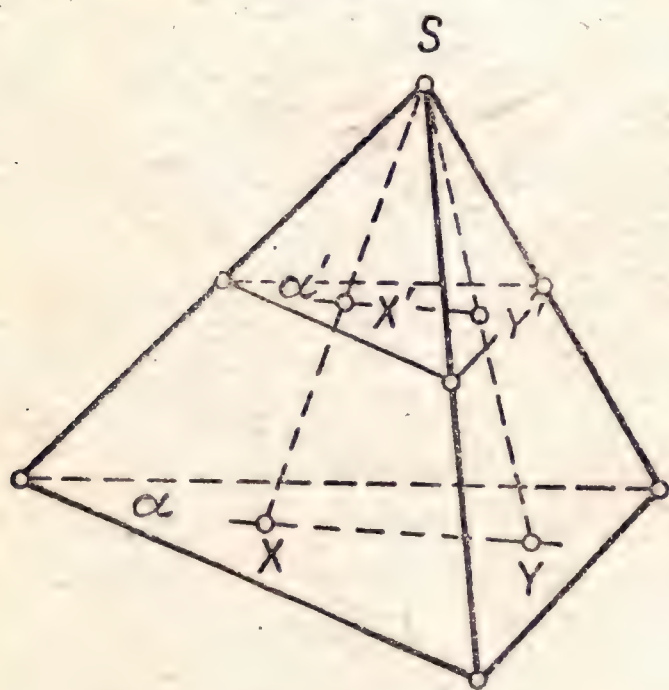


Рис. 55.

$\frac{X'S}{XS}$ и $\frac{Y'S}{YS}$ равны, т. е. от-

ношение $\frac{X'S}{XS} = k$ не зависит от взятой точки X . Отсюда

следует, что отсекаемая плоскостью α' пирамида получается преобразованием гомотетии относительно точки S с коэффициентом гомотетии k из данной

пирамиды. А гомотетичные фигуры подобны. Теорема доказана.

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием служит правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника. Очевидно, у правильной пирамиды боковые ребра равны, и, следовательно, боковые грани суть равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины, называется *апофемой*.

Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема 9.6. *Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.*

Доказательство. Если сторона основания a , а число сторон n , то боковая поверхность пирамиды будет

$$\frac{al}{2} n = \frac{an}{2} l = \frac{p}{2} l,$$

где l — апофема, а p — периметр основания. Теорема доказана.

По теореме 9.5 плоскость α' , параллельная плоскости основания α пирамиды и пересекающая пира-

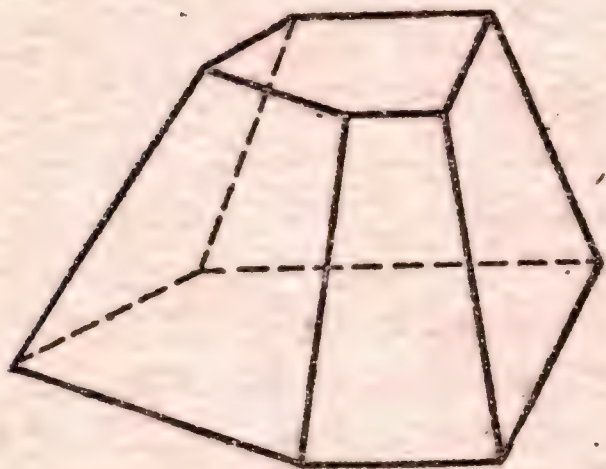


Рис. 56.

миду, отсекает от нее подобную пирамиду. Другая часть, также представляющая собой многогранник, называется *усеченной пирамидой* (рис. 56). Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях α и α' , называются *основаниями пирамиды*, остальные грани называются *боковыми гранями*. Основа-

ния усеченной пирамиды представляют собой подобные (более того, гомотетичные) многоугольники, а боковые грани — трапеции. Усеченная пирамида, которая получается из правильной пирамиды, также называется *правильной*. Боковые грани правильной усеченной пирамиды суть равные равнобокие трапеции их высоты называются апофемой.

Теорема 9.7. Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Предлагается доказать эту теорему в качестве упражнения.

Упражнения

1. Доказать, что центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра, а центры граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра.

2. Доказать, что скрещивающиеся диагонали двух параллельных граней куба являются ребрами правильного тетраэдра.

3. Найти двугранные углы правильного додекаэдра.

4. Доказать, что боковая поверхность пирамид с площадью основания S и двугранными углами при основании φ равна $\frac{S}{\cos \varphi}$.

5. Доказать равенство двух тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если у них соответствующие ребра равны, т. е. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, ... и т. д.

6. У тетраэдра скрещивающиеся ребра равны. Доказать, что все грани тетраэдра равны.

§ 10. ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКЦИОННОГО ЧЕРЧЕНИЯ

Пространственная фигура изображается на плоскости путем проектирования ее параллельными прямыми. Обычно проекция фигуры на одну плоскость не дает полного представления о фигуре. Поэтому пользуются двумя или даже тремя проекциями на две или соответственно на три плоскости. Мы рассмотрим изображение фигуры с помощью ортогонального проектирования на две плоскости.

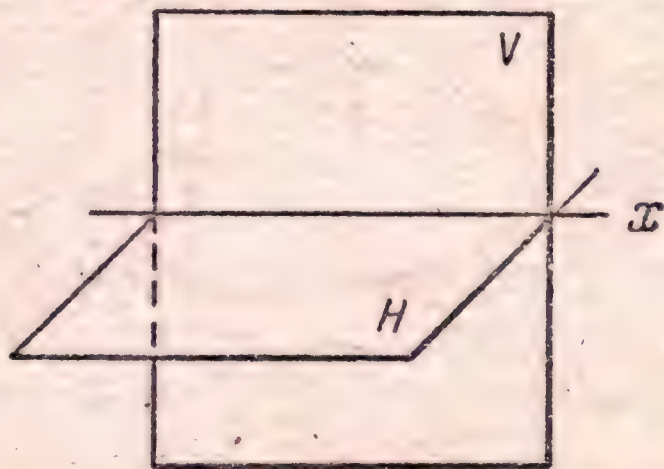


Рис. 57.

Пусть H и V — две плоскости, пересекающиеся под прямым углом по прямой x (рис. 57). Для удобства будем считать плоскость H горизонтальной, а плоскость V вертикальной. Фигура ортогонально проектируется на плоскости H и V . Проекция фигуры на горизонтальную плоскость называется горизонталь-

ной проекцией, а проекция на вертикальную плоскость называется *вертикальной проекцией*. Сами плоскости H и V называются *плоскостями проекций*, а прямая x , по которой они пересекаются, называется *осью проекций*. Выполнив проектирование фигуры на плоскости V и H , повернем горизонтальную плоскость H на угол 90° около оси x до совмещения с вертикальной плоскостью V . При этом обе проекции окажутся в одной плоскости. Полученный так чертеж с изображением обеих проекций фигуры называется *эпюром*.

Рассмотрим расположение на эпюре горизонтальной и вертикальной проекции произвольной точки. Имеет место следующее свойство.

10.1. *Вертикальная и горизонтальная проекции точки на эпюре изображаются точками, лежащими на прямой, перпендикулярной оси проекций.*

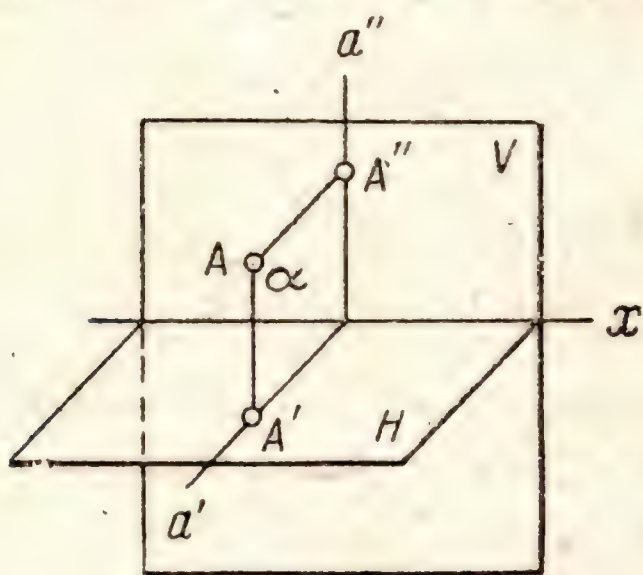


Рис. 58.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Проведем через данную точку A плоскость α , перпендикулярную оси проекций x . Она пересечет плоскости H и V по прямым a' и a'' (рис. 58). Горизонтальная проекция A' точки A лежит на прямой a' , так как перпендикуляр из точки A на плоскость H лежит в

плоскости α (теорема 5.3). Аналогично вертикальная проекция точки A'' лежит на прямой a'' . Прямые a' и a'' перпендикулярны прямой x . Так как вращение, как всякое движение, сохраняет углы, то прямые a' и a'' при совмещении вращением плоскости H с V совмещаются. Таким образом, на эпюре проекции точки A изображаются точками прямой a' . Утверждение доказано.

Задача 10.2. *Дана прямая a своими проекциями на эпюре и горизонтальная проекция точки A , лежащей на прямой a . Найти вертикальную проекцию точки A .*

Решение. Пусть a' и a'' — горизонтальная и вертикальная проекции прямой a , A' — горизонтальная

проекция точки A (рис. 59). Вертикальная проекция точки A лежит на прямой, перпендикулярной оси проекций, проходящей через точку A' , и на вертикальной проекции a'' прямой a . Следовательно, является точкой пересечения этих прямых.

Задача 10.3. Дана прямая a и не лежащая на ней точка A своими проекциями на эпюре. Построить

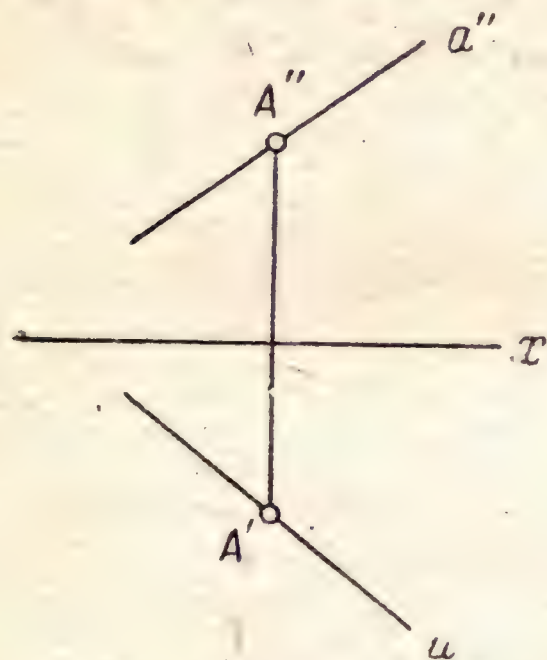


Рис. 59.

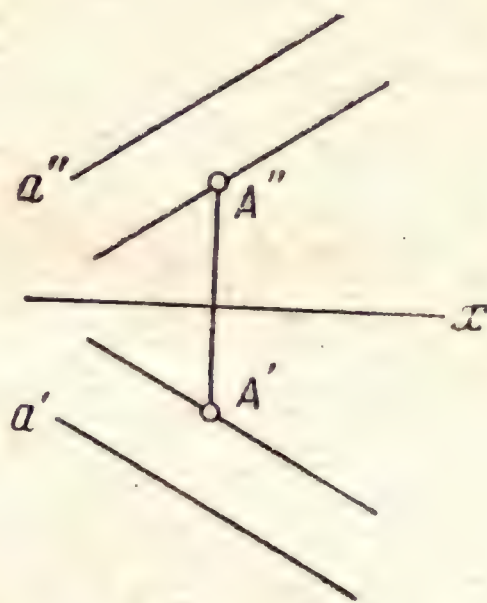


Рис. 60.

проекцию прямой, проходящей через точку A , параллельно прямой a .

Решение. Так как параллельные прямые имеют параллельные проекции, то проекции искомой прямой получим, проводя через проекции точки A прямые, параллельные соответствующим проекциям прямой a (рис. 60).

Задача 10.4. Найти длину отрезка AB по его проекциям на эпюре.

Решение. Если отрезок AB параллелен одной из плоскостей проекций, например вертикальной плоскости, то его длина равна длине проекции на эту плоскость. О параллельности отрезка AB вертикальной плоскости мы узнаем по его горизонтальной проекции, которая должна быть параллельна оси проекций.

Допустим, отрезок AB не параллелен ни одной из плоскостей проекций. Будем поворачивать отрезок AB около прямой, проектирующей его конец A , на горизонтальную плоскость. При этом проекции конца B отрезка будут изменяться. Именно, горизонтальная проекция точки B движется по окружности с центром

Решение. Пусть α и β — данные плоскости, a' и a'' — следы плоскости α , а b' и b'' — следы плоскости β (рис. 63). Прямая s , по которой пересекаются плоскости α и β пересекает вертикальную плоскость в некоторой точке P . Ее вертикальная проекция P'' является точкой пересечения вертикальных следов плоскостей, т. е. прямых a'' и b'' , а горизонтальная проекция P' лежит на оси проекций.

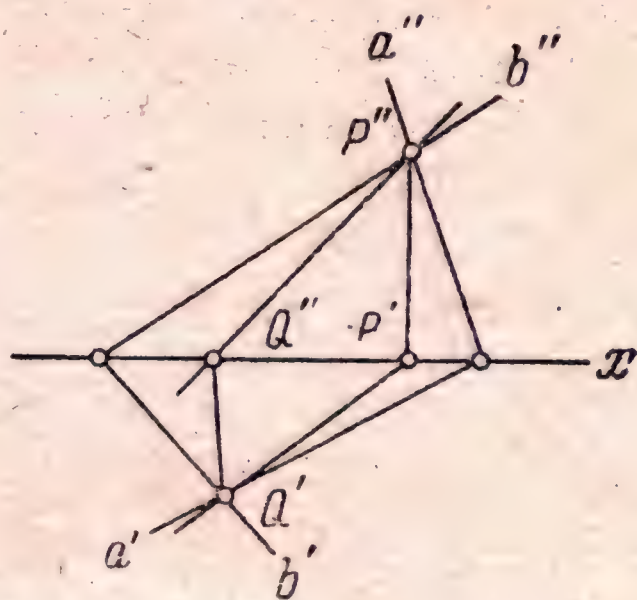


Рис. 63.

Аналогично прямая s пересекает горизонтальную плоскость в некоторой точке Q . Ее горизонтальная проекция Q' есть точка пересечения горизонтальных следов a' и b' , а вертикальная проекция лежит на оси проекций. Искомые проекции прямой s получим, соединяя точки Q'' и P'' (вертикальная проекция) и точки P' и Q' (горизонтальная проекция).

Задача 10.6. Задана прямая своими проекциями на эпюре. Найти следы плоскости, проходящей через эту прямую перпендикулярно данной плоскости проекций, например H .

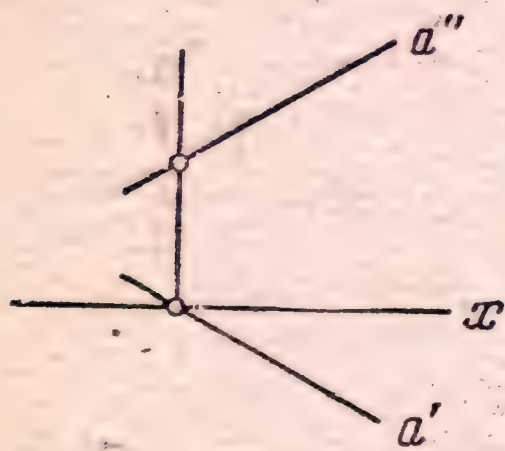


Рис. 64.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна плоскости H , то ее горизонтальный след совпадает с горизонтальной проекцией данной прямой, а вертикальный след перпендикулярен оси проекций. Для получения вертикального следа надо прове-

сти прямую, перпендикулярную оси проекций, через точку пересечения горизонтальной проекции прямой с осью (рис. 64).

Задача 10.7. Задана прямая своими проекциями и плоскость своими следами. Найти точку пересечения прямой с плоскостью, т. е. проекции этой точки.

Решение. Проведем через данную прямую плоскость, перпендикулярную H (задача 10.6). Найдем

прямую h , по которой эта плоскость пересекается с данной (задача 10.5). Прямая h и данная пересекаются в искомой точке; проекция h'' и соответствующая проекция данной прямой дают первую проекцию искомой точки; вторая проекция находится так же, как в задаче 10.2.

Задача 10.8. Даны две пересекающиеся прямые своими проекциями и горизонтальная проекция некоторой точки. Найти вертикальную проекцию этой точки, если известно, что она лежит в плоскости заданных прямых.

Решение. Проведем через горизонтальную проекцию C' данной точки произвольную прямую, пересекающую горизонтальные проекции a' и b' данных прямых (рис. 65). Точки пересечения обозначим A' и B' . Проведем через точки A' и B' прямые, перпендикулярные оси проекций. Точки пересечения этих прямых с вертикальными проекциями данных прямых обозначим A'' и B'' соответственно. Отрезки $A'B'$ и $A''B''$ являются горизонтальной и вертикальной проекцией отрезка с концами на данных прямых. Отсюда следует, что вертикальная проекция C'' искомой точки получается в пересечении прямой, проходящей через точку C' перпендикулярно оси проекций, с отрезком $A''B''$.

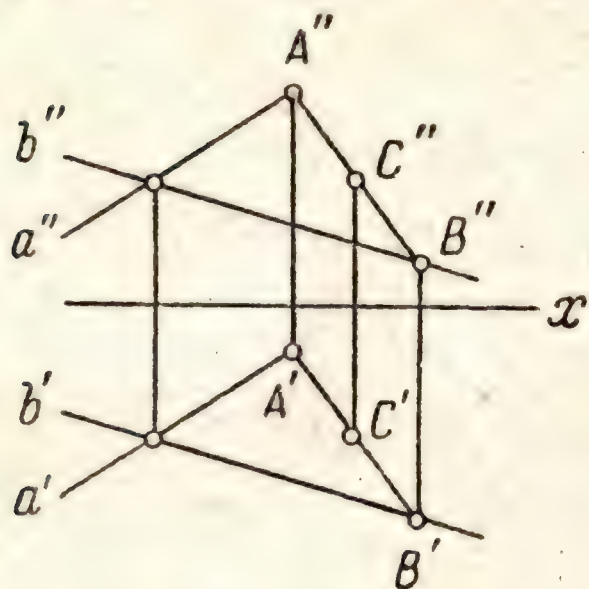


Рис. 65.

Упражнения

1. Две прямые заданы своими проекциями на эпюре. Как узнать, пересекаются эти прямые или нет?

2. Задана плоскость своими следами и точка своими проекциями на эпюре. Как узнать, лежит точка на плоскости или нет?

3. Заданы две пересекающиеся прямые своими проекциями на эпюре. Построить следы плоскости, проходящей через эти прямые.

4. Найти истинные длины сторон треугольника и построить сам треугольник по его проекциям на эпюре.

5. Задана вертикальная проекция четырехугольника и горизонтальная проекция трех его вершин. Построить горизонтальную проекцию четвертой вершины.

§ 11. ОБЪЕМЫ ПРОСТЫХ ТЕЛ

Задача определения объемов тел относится к глубокой древности. Она возникла в связи с практической деятельностью людей.

Представим себе два сосуда: один в форме куба, а второй произвольной формы (рис. 66). Пусть оба сосуда доверху наполняются жидкостью. Допустим, выяснилось, что для наполнения первого сосуда пошло m кг жидкости, а для наполнения второго сосуда n кг жидкости. Естественно считать, что второй сосуд в n/m раз больше первого. Число, указывающее, во сколько раз второй сосуд больше первого, мы будем называть *объемом* второго сосуда. Первый сосуд является *единицей измерения*. Из этого определения понятия объема получаются следующие его свойства.

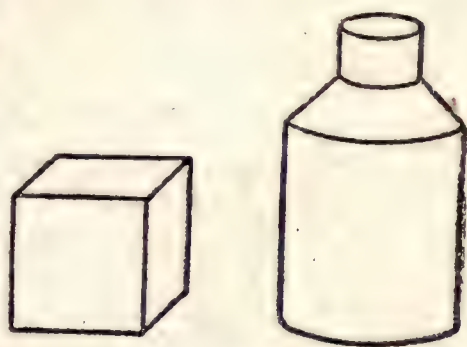


Рис. 66.

Во-первых, так как для заполнения каждого сосуда требуется определенное количество жидкости, то *каждый сосуд имеет определенный объем*.

Во-вторых, для заполнения равных сосудов требуется одно и то же количество жидкости, поэтому *равные сосуды имеют равные объемы*.

В-третьих, если данный сосуд разделить на две части, то количество жидкости, необходимое для заполнения всего сосуда, состоит из количества жидкости, необходимой для заполнения его частей. Поэтому *объем всего сосуда равен сумме объемов его частей*.

По данному нами определению для того, чтобы узнать объем сосуда, надо заполнить его жидкостью. В жизни, однако, требуется решать как раз обратную задачу. Требуется узнать количество жидкости, необходимой для заполнения сосуда, не производя самого заполнения. Если бы мы знали объем сосуда, то количество жидкости мы получили бы, умножая объем сосуда на количество жидкости, необходимой для заполнения единицы объема. Как же узнать объем сосуда?

Сейчас мы докажем, что отмеченные нами три свойства объема полностью его определяют и найдем формулы для определения объема простых тел.

Тело мы будем называть *простым*, если его можно разбить на конечное число тетраэдров, т. е. треугольных пирамид. В частности, такие тела, как призма, пирамида, вообще выпуклый многогранник — являются простыми.

Определим сначала объем прямоугольного параллелепипеда. На рис. 67 изображен куб, являющийся

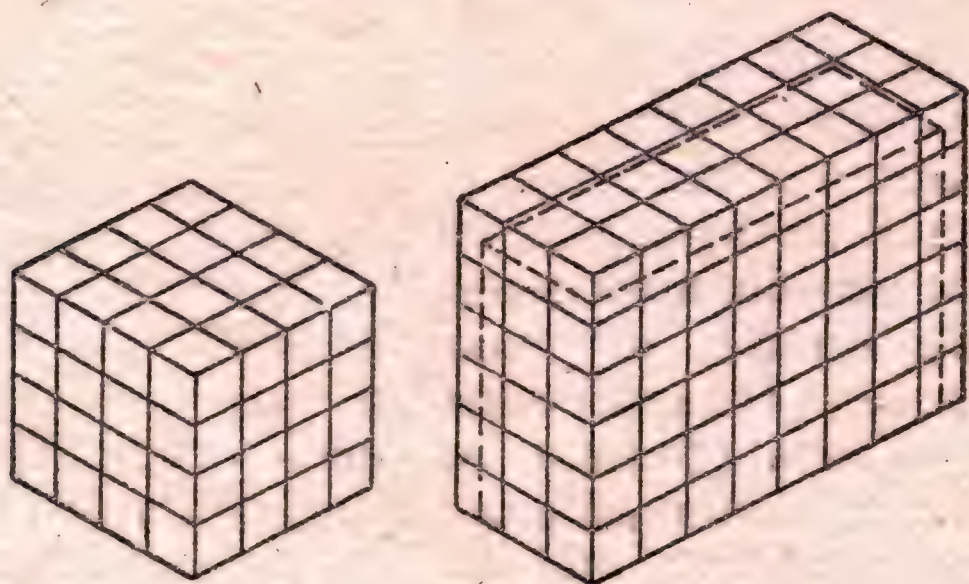


Рис. 67.

единицей измерения объема, и прямоугольный параллелепипед, объем которого надо измерить.

Разобьем ребра куба, исходящие из одной вершины, на N равных частей и проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные этим ребрам. При этом наш куб разобьется на N^3 малых кубов.

Определим объем малого куба. По свойству объема объем большого куба равен сумме объемов малых кубов. Так как объем большого куба равен единице, а число малых кубов N^3 , то объем малого куба равен $1/N^3$. Обозначим через q ребро малого куба. Тогда $q = 1/N$ и, следовательно, объем малого куба $1/N^3 = q^3$.

Отложим на ребрах параллелепипеда, исходящих из одной вершины, отрезки, равные $q, 2q, 3q, \dots$, и проведем через их концы плоскости, перпендикулярные ребрам параллелепипеда. При этом мы получим сетку кубов с ребрами, равными q , покрывающими параллелепипед. Определим число кубов, содержащихся в параллелепипеде, и число кубов, содержащих параллелепипед.

Пусть a , b и c — ребра данного параллелепипеда. Обозначим через l целое от деления a на q , через m целое от деления b на q и через n — целое от деления c на q . Тогда число кубов, содержащихся в параллелепипеде, будет lmn , а число кубов, содержащих параллелепипед, будет не больше $(l+1)(m+1)(n+1)$. Отсюда следует, что объем параллелепипеда заключен между $lmnq^3$ и $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$, т. е.

$$lmnq^3 \leq V < (l+1)(m+1)(n+1)q^3.$$

Докажем теперь, что произведение abc заключено между теми же числами. Действительно, $lq \leq a < (l+1)q$, $mq \leq b < (m+1)q$, $nq \leq c < (n+1)q$. Отсюда следует, что

$$lmnq^3 \leq abc < (l+1)(m+1)(n+1)q^3.$$

Так как оба числа V и abc заключены между числами $lmnq^3$ и $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$, то они отличаются не более, чем на $(l+1)(m+1)(n+1)q^3 - lmnq^3$, т. е. не более, чем на $lmq^3 + mnq^3 + lnq^3 + lq^3 + mq^3 + nq^3 + q^3$. Так как $lq \leq a$, $mq \leq b$, $nq \leq c$, то отсюда следует, что V и abc отличаются не более, чем на $abq + bcq + acq + aq^2 + bq^2 + cq^2 + q^3$. Это число сколь угодно мало, если достаточно мало $q = 1/N$. Получается, что числа V и abc отличаются как угодно мало. Но это может быть только тогда, если они равны.

Следовательно, объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a , b , c

$$V = abc.$$

Здесь a , b и c измеряются ребром куба, принятого за единицу измерения объема.

Определим объем наклонного параллелепипеда (рис. 68, слева). Проведем через ребро BC плоскость, перпендикулярную основанию $ABCD$, и дополним параллелепипед треугольной призмой $BB_1B_2CC_1C_2$. Отсечем теперь от полученного тела треугольную призму плоскостью, проходящей через ребро AD перпендикулярно основанию $ABCD$. Тогда получим снова параллелепипед. Этот параллелепипед имеет объем, равный объему исходного параллелепипеда. Действительно, достроенная призма и отсекаемая

совмещаются параллельным переносом на отрезок AB , а следовательно имеют одинаковые объемы.

При описанном преобразовании параллелепипеда сохраняется площадь его основания и высота. Сохраняются также плоскости двух боковых граней, а две другие становятся перпендикулярными основанию. Применяя еще раз такое преобразование, получим параллелепипед с боковыми гранями, перпендикулярными основанию, т. е. прямой параллелепипед.

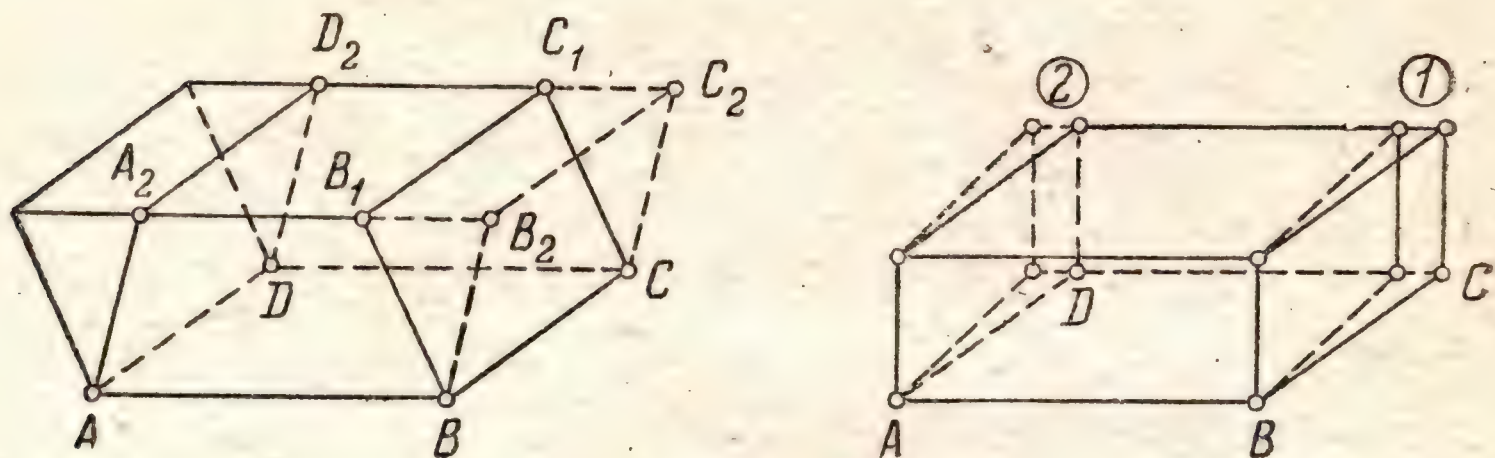


Рис. 68.

Полученный прямой параллелепипед подвергнем аналогичному преобразованию в прямоугольный параллелепипед, дополняя его сначала призмой 2, а затем отрезая призму 1 (рис. 68, справа). Это преобразование также сохраняет объем параллелепипеда, площадь основания и высоту.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров. Произведение двух линейных размеров есть площадь основания параллелепипеда, а третий размер — его высота. Таким образом, у прямоугольного параллелепипеда объем равен произведению площади основания на высоту. Так как в описанном выше преобразовании данного параллелепипеда в прямоугольный на каждом шаге сохраняется объем, площадь основания и высота, то и у исходного параллелепипеда объем равен произведению площади основания на высоту.

Итак, у любого параллелепипеда объем равен произведению площади основания на высоту.

Найдем объем призмы. Рассмотрим сначала треугольную призму (рис. 69). Дополним ее до параллелепипеда, как указано на рисунке. Точка O является

центром симметрии параллелепипеда. Поэтому построенная призма симметрична исходной относительно точки O , и, следовательно, имеет объем, равный объему исходной призмы. Таким образом, объем построенного параллелепипеда равен удвоенному объему данной призмы.

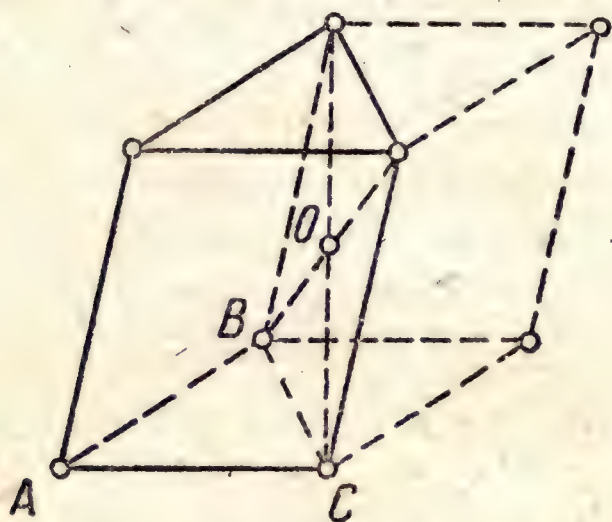


Рис. 69.

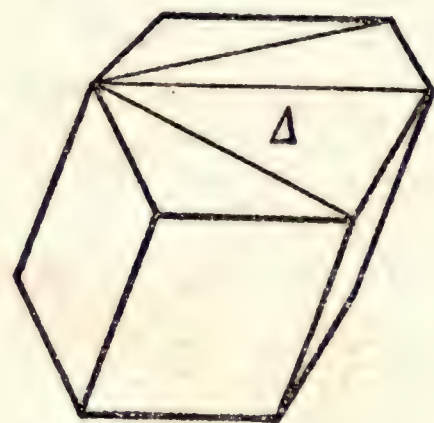


Рис. 70.

Объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту. Площадь его основания равна удвоенной площади треугольника ABC , а высота равна высоте исходной призмы. Отсюда заключаем, что объем исходной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Рассмотрим теперь произвольную призму (рис. 70). Разобьем ее основание на треугольники. Пусть Δ — один из этих треугольников. Проведем через произвольную точку X треугольника Δ прямую параллельную боковым ребрам. Пусть g_x — отрезок этой прямой, принадлежащий призме. Когда точка X описывает треугольник Δ , отрезки g_x заполняют треугольную призму. Построив такую призму для каждого треугольника Δ , мы получим разбиение данной призмы на треугольные. Все эти призмы имеют одну и ту же высоту, равную высоте исходной призмы.

Объем данной призмы равен сумме объемов треугольных призм, ее составляющих. По доказанному, объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту. Отсюда следует, что объем данной призмы

$$V = S_1H + S_2H + \dots + S_nH = (S_1 + S_2 + \dots + S_n)H,$$

где $S_1, S_2, \dots, S_n$ — площади треугольников Δ , на

которые разбито основание призмы. Сумма площадей треугольников Δ равна площади S основания данной призмы. Поэтому

$$V = SH.$$

Итак, объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Для того чтобы найти объем треугольной пирамиды, естественно было бы попытаться дополнить ее равными пирамидами до параллелепипеда и, таким образом, зная объем параллелепипеда, найти объем пирамиды. К сожалению, это в общем случае сделать нельзя. Поэтому мы применим другой способ.

Найдем отношение объемов двух произвольных пирамид (рис. 71). Пусть S и H — площадь основания

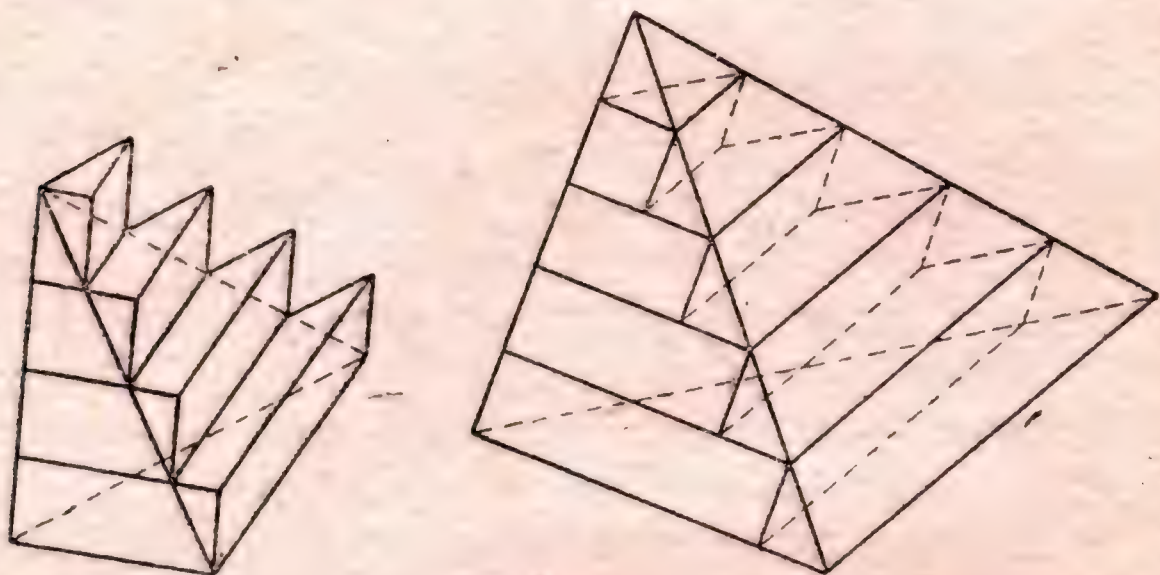


Рис. 71.

и высота первой пирамиды, а S_1 и H_1 — площадь основания и высота второй пирамиды. Разобьем высоту первой пирамиды на n равных частей, а высоту второй пирамиды на $n+1$ равных частей, и через точки деления проведем плоскости, параллельные основаниям пирамид. При этом каждая пирамида разобьется на слои. Для каждого такого слоя мы построим призму, причем для первой пирамиды призму, содержащую слой, а для второй пирамиды — призму, содержащуюся в слое, как изображено на рисунке.

Многогранник, составленный из стопки призм для первой пирамиды, содержит пирамиду и поэтому имеет объем, больший объема пирамиды. Многогранник, составленный из стопки призм для второй пира-

миды, содержится внутри пирамиды и поэтому имеет объем, меньший объема пирамиды. Пусть V и V_1 — объемы данных пирамид, а V' и V'_1 — объемы построенных многогранников. Тогда, так как $V' > V$, а $V'_1 < V_1$, то

$$\frac{V'}{V'_1} > \frac{V}{V_1}.$$

Найдем объемы многогранников V' и V'_1 . Сечения пирамиды плоскостями, параллельными плоскости основания, подобны основанию, поэтому площадь основания m -й призмы (счет ведется начиная от вершины пирамиды) для первого многогранника будет $S\left(\frac{m}{n}\right)^2$, где $\frac{m}{n}$ — коэффициент подобия. Соответственно, объем m -й призмы будет $S\left(\frac{m}{n}\right)^2 \frac{H}{n}$. Объем многогранника, составленного из стопки призм, будет равен сумме объемов призм, т. е.

$$\begin{aligned} V' &= S \frac{H}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right\} = \\ &= \frac{SH}{n^3} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \end{aligned}$$

Аналогично находим объем многогранника для второй пирамиды:

$$\begin{aligned} V'_1 &= S_1 \frac{H_1}{n+1} \left\{ \frac{1}{(n+1)^2} + \left(\frac{2}{n+1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \right\} = \\ &= \frac{S_1 H_1}{(n+1)^3} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \end{aligned}$$

Отношение этих объемов будет

$$\frac{V'}{V'_1} = \frac{SH}{S_1 H_1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{SH}{S_1 H_1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3.$$

Так как $\frac{V'}{V'_1} > \frac{V}{V_1}$, то

$$\frac{SH}{S_1 H_1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 > \frac{V}{V_1}.$$

Так как это неравенство верно при любом, сколь

угодно большом n , то

$$\frac{SH}{S_1 H_1} \geq \frac{V}{V_1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{SH}{V} \geq \frac{S_1 H_1}{V_1}.$$

Поменяв ролями пирамиды, получим обратное неравенство. Именно,

$$\frac{S_1 H_1}{V_1} \geq \frac{SH}{V}.$$

А это значит, что

$$\frac{SH}{V} = \frac{S_1 H_1}{V_1}.$$

Итак, отношение $\frac{SH}{V}$ имеет одну и ту же величину для всех пирамид.

Возьмем теперь куб с ребром, равным единице. Пусть A и A_1 — две противоположные вершины куба.

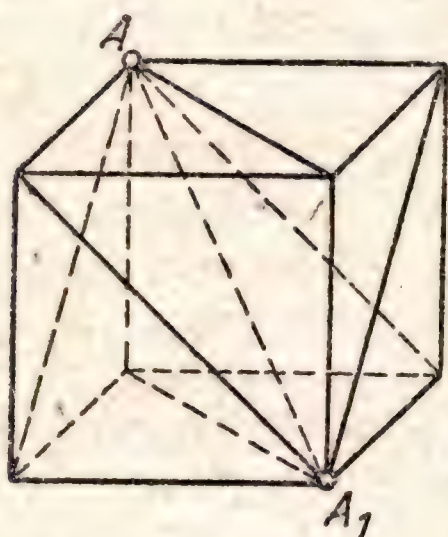


Рис. 72.

Проведем из вершины A_1 диагонали граней, сходящихся в этой вершине (рис. 72). Эти диагонали разобьют грани на треугольники Δ . Таких треугольников будет шесть. Разобьем куб на шесть пирамид с общей вершиной A и треугольниками Δ в качестве оснований. Все эти пирамиды равны, так как любые две из них с общей боковой гранью симметричны относительно плоскости этой грани.

Так как объем куба равен единице, то объем каждой пирамиды равен $1/6$. Площадь основания пирамид равна $1/2$, а высота 1. Поэтому для таких пирамид отношение $\frac{SH}{V} = 3$. Так как это отношение одно и то же для любой пирамиды, то объем любой треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} HS.$$

Пусть теперь имеем любую, не треугольную пирамиду. Разобьем ее основание на треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Пирамиды, у которых основаниями служат эти треугольники, а вершиной — вершина данной пирамиды, составляют данную пирамиду. Объем данной пирамиды равен сумме объемов составляющих ее пирамид. Так как все они имеют одну и ту же высоту H , что и данная пирамида, то объем данной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = \frac{1}{3} HS.$$

Итак, *объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.*

Пусть T и T' — два подобных тела. Это значит, что существует преобразование подобия, при котором тело T переходит в тело T' . Обозначим через k коэффициент подобия.

Разобьем тело T на треугольные пирамиды $p_1, p_2, \dots, p_n$. Объем тела T равен сумме объемов этих пирамид. Преобразование подобия, которое переводит тело T в тело T' , переводит пирамиды $p_1, p_2, \dots, p_n$ в пирамиды $p'_1, p'_2, \dots, p'_n$. Эти пирамиды составляют тело T' , и поэтому объем тела T' равен сумме объемов пирамид $p'_1, p'_2, \dots, p'_n$.

Так как пирамиды p'_i и p_i подобны и коэффициент подобия равен k , то отношение их высот равно k , а отношение площадей их оснований равно k^2 . Следовательно, отношение объемов пирамид равно k^3 . Так как тело T составлено из пирамид p_i , а тело T' составлено из пирамид p'_i , то отношение объемов тел T' и T тоже равно k^3 .

Число k — коэффициент подобия — равно отношению расстояний любых двух соответствующих пар точек при преобразовании подобия. Следовательно, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров тел T' и T . Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

Объемы двух подобных тел относятся как кубы соответствующих их линейных размеров.

Воспользуемся этим свойством для определения объема усеченной пирамиды. Именно, докажем следующую формулу для объема усеченной пира-

миды:

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

где S_1 и S_2 — площади оснований пирамиды, а H — высота пирамиды.

Дополним данную усеченную пирамиду до полной и обозначим H_1 ее высоту. Пусть S_1 — площадь ее основания. Высоту дополняющей пирамиды обозначим H_2 , а площадь основания S_2 . Так как пирамиды подобны, то площади их оснований относятся как квадраты высот, а объемы — как кубы высот, т. е.

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2, \quad \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3.$$

Имеем

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = V_1 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = V_1 \left[1 - \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3\right] = \\ &= V_1 \left(1 - \frac{H_2}{H_1}\right) \left[1 + \frac{H_2}{H_1} + \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2\right] = \\ &= V_1 \left(1 - \frac{H_2}{H_1}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} + \frac{S_2}{S_1}\right) = \\ &= \frac{V_1}{H_1 S_1} (H_1 - H_2) (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2). \end{aligned}$$

Так как $H_1 - H_2 = H$, а $V_1 = \frac{1}{3} H_1 S_1$, то

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

Формула для объема усеченной пирамиды доказана.

Объем простого тела мы находим, суммируя объемы треугольных пирамид, из которых оно составлено. Но простое тело можно по-разному разбить на треугольные пирамиды, а вычисляя объем пирамиды, можно по-разному выбрать ее основание. В связи с этим возникают два вопроса:

1. Не зависит ли объем треугольной пирамиды от выбора ее основания?

2. Не зависит ли объем простого тела от способа разбиения его на треугольные пирамиды?

Если на оба эти вопроса ответ положителен, то наше определение объема, как говорят, корректно.

Докажем сначала, что объем пирамиды не зависит от того, какая из его граней принята за основание. Пусть $DABC$ — данная треугольная пирамида (рис. 73). Обозначим через α , β , γ плоские углы трехгранного угла пирамиды при вершине D . Именно, угол BDC обозначим через α , угол ADC — через β , а угол ADB — через γ . Двугранные углы при ребрах трехгранного угла с вершиной D обозначим через a , b , c . Именно, угол с ребром DA обозначим через a , угол с ребром DB — через b , а угол с ребром DC — через c .

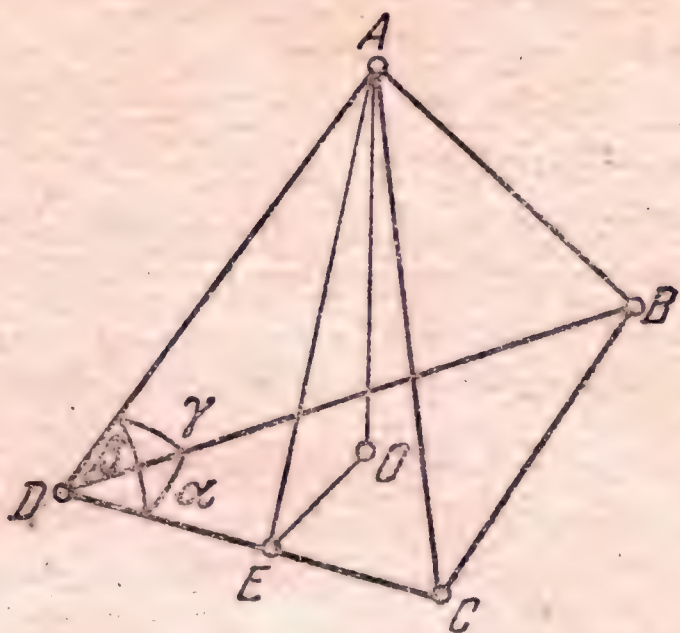


Рис. 73.

Опустим из вершины A перпендикуляр AE на прямую DC и перпендикуляр AO на плоскость грани BDC .

Примем грань BDC за основание пирамиды. Тогда площадь основания

$$S = \frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin \alpha.$$

Высота пирамиды

$$H = AO = AE \sin c = DA \cdot \sin \beta \sin c.$$

Таким образом, объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6} DA \cdot DB \cdot DC \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin c.$$

Таким же способом, приняв грань ADB за основание пирамиды, получим для объема пирамиды другое выражение. Именно,

$$V = \frac{1}{6} DA \cdot DB \cdot DC \sin \alpha \sin \gamma \sin b.$$

Полученные два выражения для объема пирамиды отличаются множителями $\sin \beta \sin c$ и $\sin \gamma \sin b$. Равны ли эти множители? Да, равны. Действительно, по теореме синусов для трехгранного угла с

вершиной D

$$\frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

Отсюда $\sin \beta \sin c = \sin \gamma \sin b$.

Итак, *объем треугольной пирамиды не зависит от того, какая грань пирамиды принята за ее основание.*

Перейдем ко второму вопросу. Возьмем треугольную пирамиду и разобьем ее на более мелкие треугольные пирамиды. Докажем, что объем пирамиды, определяемый по формуле $V = \frac{1}{3} SH$, равен сумме объемов составляющих ее пирамид, определяемых по той же формуле. Сначала рассмотрим специальное разбиение пирамиды, при котором пирамиды, составляющие данную, имеют с ней общую вершину, а их основания разбивают основание данной пирамиды. Если площади оснований пирамид $S_1, S_2, \dots, S_n$, то сумма их объемов

$$\begin{aligned} V &= \frac{S_1 H_1}{3} + \frac{S_2 H_2}{3} + \dots + \frac{S_n H_n}{3} = \\ &= \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) H \end{aligned}$$

действительно равна объему данной пирамиды.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение данной треугольной пирамиды $ABCD$ на мелкие треугольные пирамиды $PQRS$. Пусть любые две пирамиды этого разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общее ребро, либо общую грань.

Объем пирамиды $PQRS$ можно представить в виде алгебраической суммы объемов четырех пирамид $AQRS, PARS, PQAS, PQRA$. Эти пирамиды получаются из пирамиды $PQRS$ заменой одной из ее вершин на вершину A исходной пирамиды. Знак, с которым надо брать слагаемые указанной алгебраической суммы, определяется по следующему правилу. Если вершина, которая заменяется на вершину A , лежит по одну сторону от плоскости противоположащей грани с точкой A , то слагаемое берется со знаком «+», если по разные стороны, то со знаком «—». Если при замене вершиной A четыре точки оказываются распо-

ложенными в одной плоскости, то слагаемое опускается, объем считается равным нулю.

Представив объем каждой пирамиды нашего разбиения в виде алгебраической суммы объемов пирамид с вершиной A , сложим объемы всех пирамид разбиения. Мы получим алгебраическую сумму объемов пирамид вида $AXYZ$, где XYZ — грань пирамиды нашего разбиения. Если грань XYZ лежит внутри исходной пирамиды, то объем пирамиды $AXYZ$ в нашу сумму входит дважды, потому что грань XYZ принадлежит точно двум пирамидам разбиения. Так как пирамиды расположены по разные стороны их общей грани XYZ , то один раз объем пирамиды $AXYZ$ входит со знаком «+», а второй раз со знаком «—». В результате такие слагаемые взаимно уничтожаются.

Если грань XYZ принадлежит грани $B CD$ исходной пирамиды, то объем пирамиды $AXYZ$ входит в нашу сумму только один раз, причем со знаком «+». Если же грань XYZ принадлежит любой из трех остальных граней исходной пирамиды, то объем пирамиды $AXYZ$ просто равен нулю. В итоге сумма объемов пирамид нашего разбиения равна сумме объемов пирамид вида $AXYZ$ с гранью XYZ , лежащей в грани $B CD$ исходной пирамиды. Но было уже доказано, что эта сумма равна объему исходной пирамиды.

Пусть теперь простое тело разбито в одном случае на пирамиды $p'_1, p'_2, p'_3, \dots$, а во втором случае на пирамиды $p''_1, p''_2, p''_3, \dots$. Докажем, что суммы объемов пирамид обоих разбиений одинаковы.

Пирамиды первого и второго разбиения, взятые вместе, производят разбиение нашего тела на выпуклые многогранники. Каждый такой многогранник представляет собой общую часть одной из пирамид первого разбиения и одной из пирамид второго разбиения. Эти выпуклые многогранники мы разобьем на мелкие пирамиды $p'''_1, p'''_2, p'''_3, \dots$, причем сделаем это так, чтобы любые две пирамиды либо не имели общих точек, либо имели общую вершину, либо общее ребро, либо общую грань. Такое разбиение всегда возможно.

По доказанному, объем каждой пирамиды первого разбиения равен сумме объемов пирамид p_k''' , которые в нее входят. Точно так же объем каждой пирамиды второго разбиения равен сумме объемов пирамид p_k''' . Поэтому сумма объемов пирамид как первого, так и второго разбиения равна сумме объемов всех пирамид p_k''' . Таким образом, сумма объемов пирамид первого и второго разбиения одинакова, т. е. *объем простого тела не зависит от способа его разбиения на треугольные пирамиды.*

Упражнения

1. Доказать, что плоскость, проходящая через ребро тетраэдра и делящая его противолежащее ребро в отношении $m:n$, делит объем тетраэдра в том же отношении.

2. Пусть плоскость α пересекает ребра тетраэдра, исходящие из одной вершины, и делит эти ребра в отношении m/n , p/q , r/s , считая от общей вершины ребер. Доказать, что объем тетраэдра, отсекаемого плоскостью α от данного тетраэдра, равен

$$\left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{p}{p+q}\right)\left(\frac{r}{r+s}\right)V,$$

где V — объем данного тетраэдра.

3. Доказать, что объем тетраэдра не изменяется, если его противоположные ребра скользят по двум скрещивающимся прямым.

4. Плоскость α перпендикулярна боковым ребрам призмы и не пересекает оснований. Доказать, что объем призмы равен произведению площади сечения призмы плоскостью α на длину боковых ребер.

5. Найти объем параллелепипеда, зная его ребра a , b , c , исходящие из одной вершины, и углы α , β , γ , образуемые этими ребрами.

§ 12. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Пусть α и α' — две параллельные плоскости и a — пересекающая их прямая. Возьмем произвольный круг k в плоскости α (рис. 74). Проведем через произвольную точку X круга k прямую, параллельную a , и отрезок этой прямой между плоскостями α и α' обозначим через a_X . Когда точка X описывает круг k , отрезки a_X заполняют некоторое тело. Это тело называется *круговым цилиндром*.

Граница кругового цилиндра состоит из круга k , равного ему круга k' в плоскости α' и боковой

поверхности. Боковая поверхность цилиндра описывается отрезком a_X , когда точка X пробегает окружность круга k . При этом сами отрезки a_X называются образующими цилиндра. Круги k и k' называются основаниями цилиндра.

Круговой цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны основаниям. Мы будем рассматривать только прямые круговые цилиндры. Поэтому слова «прямой» и «круговой» в дальнейшем опускаются.

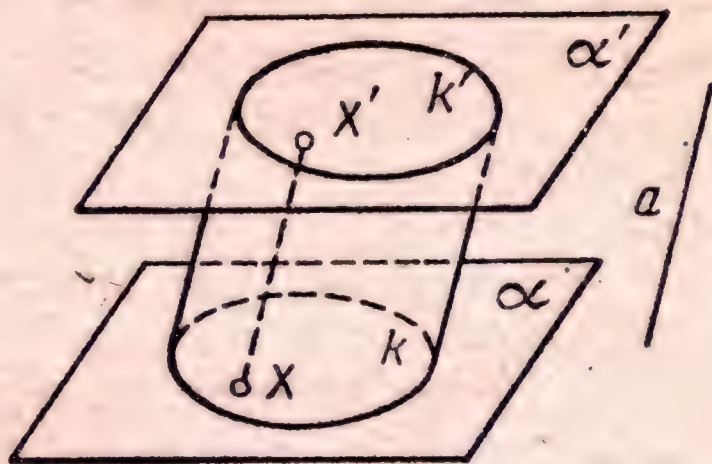


Рис. 74.

Прямая, проходящая через центр основания цилиндра параллельно его образующим, называется *осью цилиндра*. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую цилиндра перпендикулярно осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью* цилиндра.

Теорема 12.1. *Плоскость, параллельная оси цилиндра, либо не пересекает боковой поверхности цилиндра, либо пересекает ее по двум образующим, либо касается цилиндра.*

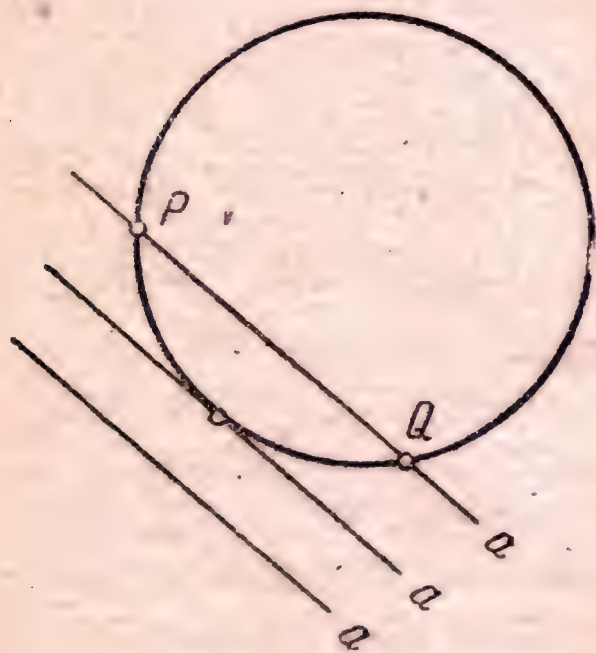


Рис. 75.

Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

Доказательство. Начнем с первого утверждения. Пусть α — плоскость, параллельная оси цилиндра (рис. 75). Ортогональная проекция боковой поверхности на плоскость основания цилиндра есть окружность основания ω . Проекция плоскости α есть прямая a , по которой плоскость α пересекает плоскость основания. Если прямая a не пересекает

окружность κ , то плоскость α не пересекает боковую поверхность цилиндра. Если прямая a пересекает окружность κ в двух точках P и Q , то пересечение плоскости α с боковой поверхностью состоит из двух образующих с концами в точках P и Q . Если, наконец, прямая a касается окружности κ , то плоскость α касается цилиндра вдоль образующей с концом в точке касания прямой a с окружностью κ .

Пусть теперь β — плоскость, перпендикулярная оси цилиндра. Эта плоскость параллельна основаниям. Параллельный перенос в направлении оси цилиндра, совмещающий плоскость β с плоскостью основания цилиндра, совмещает сечение боковой поверхности плоскостью β с окружностью основания цилиндра. Теорема доказана.

Призмой, *вписанной в цилиндр*, называется такая призма, у которой плоскости оснований совпадают с плоскостями оснований цилиндра, а боковые ребра являются образующими цилиндра (рис. 76, слева).

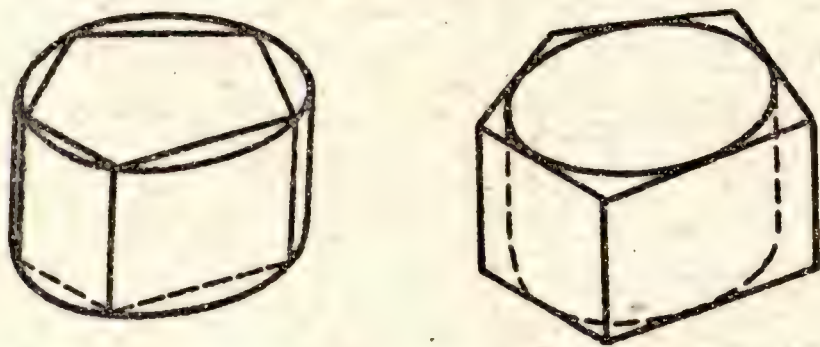


Рис. 76.

Призма называется *описанной около цилиндра*, если плоскости ее оснований являются плоскостями оснований цилиндра, а грани касаются боковой поверхности цилиндра (рис. 76, справа).

Пусть α — плоскость и S — точка, не лежащая в этой плоскости. Возьмем в плоскости α произвольный круг k (рис. 77). Соединим произвольную точку X круга отрезком XS с точкой S . Когда точка X описывает круг k , отрезки XS заполняют некоторое тело. Это тело называется *круговым конусом*. Граница конуса состоит из круга k — основания конуса и *боковой поверхности*. Боковую поверхность конуса описывает отрезок XS , когда точка X движется по окружности круга k . Точка S называется *вершиной конуса*. Отрезки XS , соединяющие вершину конуса с точками

окружности основания, называются *образующими конуса*.

Круговой конус называется *прямым*, если ортогональная проекция его вершины на плоскость основания совпадает с центром основания. Прямая, проходящая через вершину конуса перпендикулярно основанию, называется *осью конуса*. Мы будем рассматривать только прямой круговой конус. Поэтому для краткости слова «прямой» и «круговой» будут опускаться.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью*.

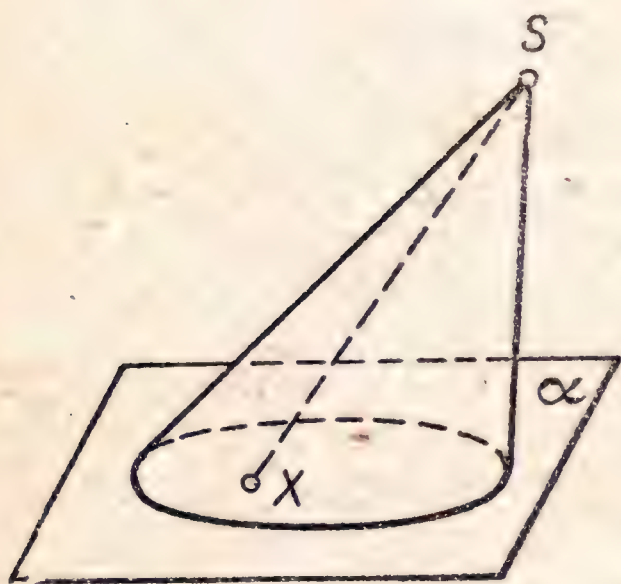


Рис. 77.

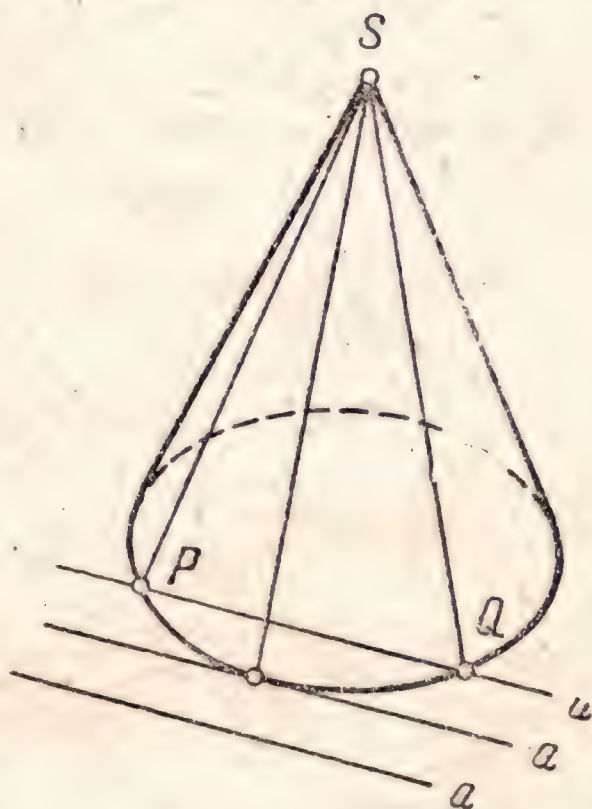


Рис. 78.

Теорема 12.2. *Плоскость, проходящая через вершину конуса, либо не имеет других общих точек с конусом, либо пересекает боковую поверхность по двум образующим, либо касается боковой поверхности.*

Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

Доказательство. Пусть α — плоскость, проходящая через вершину конуса, и a — прямая, по которой она пересекает плоскость основания (рис. 78).

Если прямая a пересекает окружность основания в двух точках, P и Q , то плоскость α пересекает боковую поверхность по образующим PS и QS . Если прямая a касается окружности основания, то плоскость α касается боковой поверхности. Если плоскость α не пересекает окружность, то она не имеет других общих точек с конусом, кроме вершины.

Пусть теперь β — плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекающая конус. Преобразование гомотетии относительно вершины конуса, совмещающее плоскость β с плоскостью основания, совмещает сечение конуса плоскостью β с основанием конуса. Следовательно, сечение конуса плоскостью β есть круг, а сечение боковой поверхности — окружность с центром на оси конуса. Теорема доказана.

Пирамидой, *вписанной в конус*, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса (рис. 79, слева). Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются

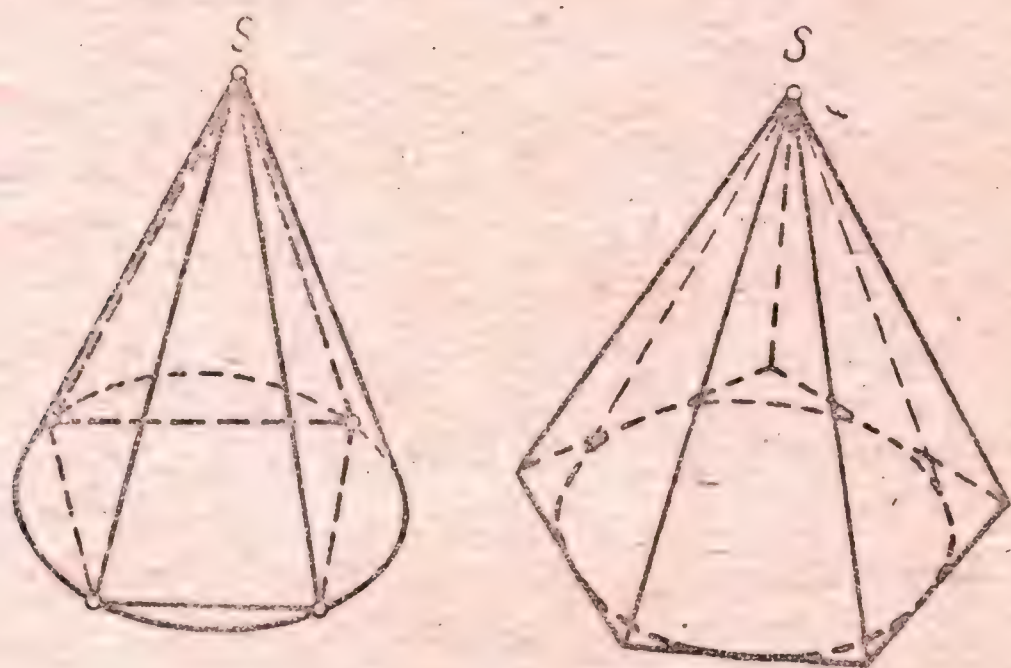


Рис. 79.

образующими конуса. Пирамида называется *описанной* около конуса, если ее основанием является многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 79, справа). Боковые грани описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.

Пусть O — произвольная точка и R — любое положительное число. Тело, точками которого являются

все точки пространства, которые удалены от точки O на расстояние, не большее R , называется *шаром*. Точка O называется *центром шара*, а число R — *радиусом шара*. Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой*. Таким образом, точками сферы являются те точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой шаровой поверхности, также называется *радиусом*. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности, проходящий через центр шара, называется *диаметром*. Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками шара*.

Теорема 12.3. *Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.*

Доказательство. Пусть α — секущая плоскость и O — центр шара (рис. 80). Опустим перпендикуляр из центра шара на плоскость α и обозначим через O' основание этого перпендикуляра. Пусть X — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α . По теореме Пифагора

$$(OX)^2 = (OO')^2 + (O'X)^2.$$

Так как OX не больше радиуса R шара, то

$$O'X \leq \sqrt{R^2 - (OO')^2},$$

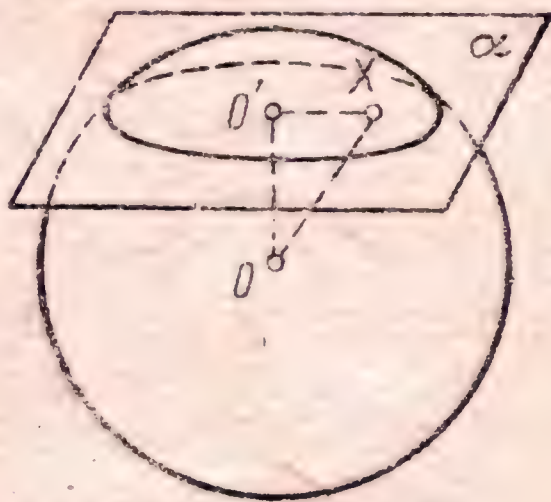


Рис. 80.

т.е. любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки O' на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - (OO')^2}$, следовательно, принадлежит кругу с центром O' и радиусом $\sqrt{R^2 - (OO')^2}$. Обратно, любая точка X этого круга принадлежит шару. А это значит, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке O' . Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что радиус круга, который получается в сечении шара пло-

скостью α ,

$$R' = \sqrt{R^2 - (OO')^2}.$$

Отсюда видно, что круг в сечении шара плоскостью α будет тем больше, чем ближе находится плоскость α от центра шара, т. е. чем меньше OO' . Наибольший круг получается в сечении шара плоскостью, проходящей через центр шара. Радиус этого круга равен радиусу шара. Равноудаленные от центра плоскости пересекают шар по равным кругам.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*.

Теорема 12.4. *Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является центром симметрии.*

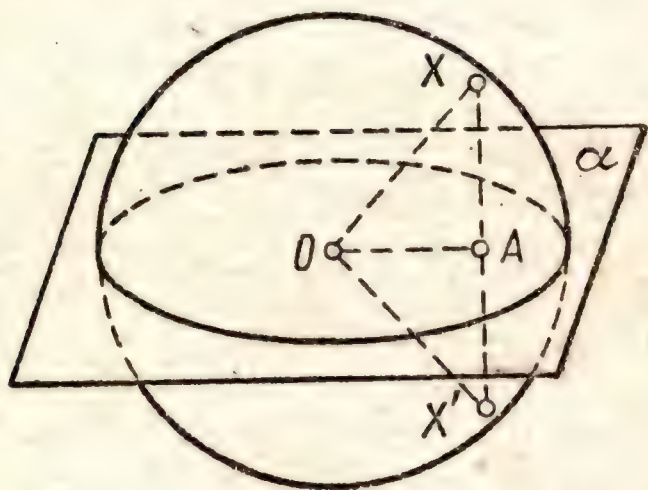


Рис. 81.

Доказательство. Пусть α — диаметральная плоскость и X — произвольная точка шара (рис. 81). Построим точку X' , симметричную точке X относительно плоскости α . Отрезок XX' перпендикулярен плоскости α и пересекается этой

плоскостью посередине (точка A). Из равенства прямоугольных треугольников OAX и OAX' следует, что $OX' = OX$. Так как $OX \leq R$, то и $OX' \leq R$, т. е. точка, симметричная точке X , принадлежит шару. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь X'' — точка, симметричная точке X относительно центра шара. Тогда $OX'' = OX \leq R$, т. е. точка X'' принадлежит шару. Теорема доказана полностью.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется *большим кругом*.

Теорема 12.5. *Через любые две не диаметральные точки шаровой поверхности можно провести окружность большого круга и притом только одну.*

Доказательство. Пусть O — центр шара и A , B — две данные не диаметральные точки его поверх-

ности (рис. 82). Проведем через точки A , O , B плоскость α . Плоскость α пересекает шар по большому кругу. Окружность этого круга проходит через точки A и B .

Другой такой окружности, проходящей через точки A и B , быть не может. Действительно, плоскость α' соответствующего большого круга должна проходить через точки A , B и O . А так как точки A , B , O не лежат на одной прямой, то через них проходит единственная плоскость, т. е. плоскость α . Теорема доказана.

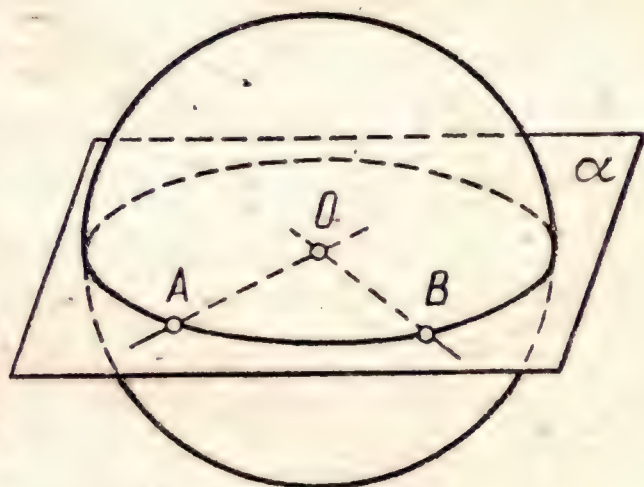


Рис. 82.

Теорема 12.6. Любые две окружности больших кругов шара пересекаются и притом в двух диаметральных точках.

Действительно, плоскости больших кругов имеют общую точку (центр шара) и следовательно пересекаются по некоторой прямой. Точки пересечения этой прямой с поверхностью шара являются точками пересечения окружностей больших кругов. Теорема доказана.

Плоскость, проходящая через точку A шаровой поверхности перпендикулярно радиусу, проведенному в точку A , называется *касательной плоскостью* (рис. 83). Точка A называется *точкой касания*.

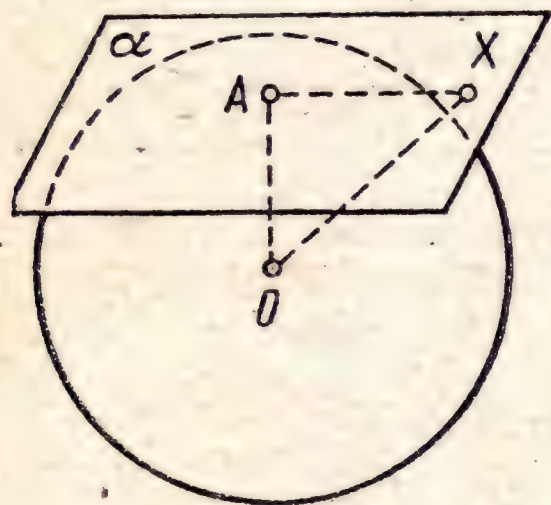


Рис. 83.

Теорема 12.7. Касательная плоскость шара имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

Доказательство. Пусть α — касательная плоскость к шару и A — точка касания (рис. 83). Возьмем произвольную точку X плоскости α , отличную от A . Так как OA перпендикуляр, а OX наклонная, то $OX > OA = R$. Следовательно, точка X не принадлежит шару. Теорема доказана.

Прямая, проходящая через точку A шаровой поверхности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной*.

Теорема 12.8. *Через любую точку шаровой поверхности проходит бесчисленное множество касательных, все они лежат в касательной плоскости шара.*

Действительно, пусть α — касательная плоскость шара в точке A (рис. 83). Тогда любая прямая в плоскости α , проходящая через точку A , перпендикулярна радиусу OA и, следовательно, является касательной. Любая касательная, проходящая через точку A , перпендикулярна радиусу OA , и, следовательно, лежит в плоскости α . Теорема доказана.

Упражнения

1. Доказать, что плоскости, проходящие через ось цилиндра, являются его плоскостями симметрии.

2. Доказать, что цилиндр есть тело вращения, именно, любое вращение около оси цилиндра совмещает цилиндр с самим собой.

3. Доказать, что пересечение боковых поверхностей двух равных цилиндров с пересекающимися осями лежит в двух перпендикулярных плоскостях.

4. Доказать, что середины параллельных отрезков с концами на боковой поверхности цилиндра лежат в плоскости, проходящей через ось цилиндра.

5. Доказать, что конус есть тело вращения. Именно, любое вращение около оси конуса совмещает конус с самим собой.

6. Доказать, что боковая поверхность конуса равна $S/\cos \alpha$, где S — площадь основания конуса, а α — угол между основанием и образующими.

7. Доказать, что середины параллельных отрезков с концами на боковой поверхности конуса лежат в плоскости, проходящей через вершину конуса.

8. Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на плоскости, проходящие через данную точку B , есть шаровая поверхность.

9. Доказать, что геометрическое место средин параллельных отрезков с концами на шаровой поверхности есть большой круг.

10. Доказать, что пересечение двух шаровых поверхностей есть окружность.

11. Доказать, что если любая плоскость, проходящая через точку O тела, является плоскостью его симметрии, то это тело есть шар.

§ 13. ОБЪЕМЫ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В § 11 речь шла об объеме простого тела, т. е. тела, допускающего разбиение на конечное число треугольных пирамид. Объем такого тела есть сумма объемов треугольных пирамид, из которых оно со-

ставлено. А объем треугольной пирамиды определяется по формуле $V = \frac{1}{3} SH$. Теперь, отправляясь от объемов простых тел, мы определяем понятие объема для любого тела.

Объемом тела T мы будем называть число V , обладающее следующими свойствами:

1) число V не больше объема любого простого тела, содержащего данное тело T ;

2) не существует числа, большего V , обладающего свойством 1).

Таким образом, число V есть наибольшее из чисел, обладающих свойством 1). В случае простого тела данное определение приводит к прежнему значению объема, так как среди простых тел, содержащих данное тело, есть оно само.

Отметим некоторые свойства объема, непосредственно вытекающие из его определения.

Если тело T_1 содержится в теле T_2 , то объем тела T_1 не больше объема тела T_2 . Действительно, всякое простое тело, содержащее тело T_2 , содержит тело T_1 , поэтому его объем не меньше объема V_1 тела T_1 . А объем V_2 тела T_2 есть наибольшее число, обладающее этим свойством. Следовательно, $V_1 \leq V_2$.

Если тела T_1 и T_2 равны, то их объемы равны. Действительно, если тело T_1 можно заключить в простое тело T'_1 , то тело T_2 можно заключить в простое тело T'_2 , равное T'_1 . Поэтому V_2 не больше объема любого простого тела, содержащего тело T_1 . А V_1 — наибольшее число, обладающее этим свойством. Следовательно, $V_2 \leq V_1$. Поменяв ролями тела T_1 и T_2 , приходим к обратному неравенству: $V_1 \leq V_2$. Следовательно, $V_1 = V_2$.

Если тела T_1 и T_2 подобны, то их объемы относятся как кубы линейных размеров. Действительно, если тело T_1 можно заключить в простое тело объема x , то тело T_2 можно заключить в подобное тело объема k^3x , где k — коэффициент подобия. Поэтому $V_2 \leq k^3x$. Следовательно, $V_2/k^3 \leq x$. Таким образом, число V_2/k^3 меньше объема любого простого тела, содержащего тело T_1 . Число V_1 есть наибольшее число, обладающее этим свойством. Поэтому $V_1 \geq V_2/k^3$.

Поменяв ролями тела T_1 и T_2 , приходим к обратному неравенству: $V_1 k^3 \leq V_2$. Отсюда следует, что $V_2 = k^3 V_1$, или $V_2/V_1 = k^3$.

Если тело разбивается плоскостью, конической, цилиндрической или сферической поверхностью, то объем тела равен сумме объемов тел, на которые оно разбивается.

Доказательство этой теоремы будет основано на том, что любой конечный кусок плоскости, цилиндрической, конической или сферической поверхности можно заключить в простое тело сколь угодно малого объема. Для плоскости это очевидно. Достаточно взять квадрат, содержащий данный кусок плоскости, и построить параллелепипед с этим квадратом в основании и достаточно малой высотой. Для других поверхностей мы докажем это свойство дальше.

Доказательство. Пусть для определенности тело T разбивается цилиндрической поверхностью на два тела, T_1 и T_2 . Пусть V_1 и V_2 их объемы, а V — объем тела T .

Пусть ε — малое положительное число. Построим простое тело T'_1 , содержащее тело T_1 , имеющее объем не больше $V_1 + \varepsilon$. Такое тело существует. В противном случае объемы всех простых тел, содержащих T_1 , были бы не меньше $V_1 + \varepsilon$. Следовательно, объем тела T_1 тоже был бы не меньше $V_1 + \varepsilon$.

Построим простое тело T'_2 , содержащее тело T_2 , с объемом не больше $V_2 + \varepsilon$. Простое тело T' , составленное из тел T'_1 и T'_2 , будет иметь объем не больше $V_1 + V_2 + 2\varepsilon$. Тело T' содержит тело T . Поэтому объем тела T не больше объема тела T' . Следовательно, $V \leq V_1 + V_2 + 2\varepsilon$. Так как ε — любое положительное число, то из этого неравенства следует, что $V \leq V_1 + V_2$.

Построим теперь простое тело T' , содержащее тело T , имеющее объем не больше $V + \varepsilon$. Тело T' разбивается цилиндрической поверхностью на два тела, T'_1 и T'_2 . Построим тело S' объема не больше ε , содержащее общую границу тел T'_1 и T'_2 . Присоединяя тело S' к T'_1 и T'_2 , мы получим простые тела T''_1 и T''_2 , содер-

жащие тела T_1 и T_2 . Сумма объемов тел T_1'' и T_2'' не больше $V + 2\varepsilon$. Следовательно, $V_1 + V_2 \leq V + 2\varepsilon$. Так как ε сколь угодно мало, то $V_1 + V_2 \leq V$. Сопоставляя полученные неравенства, заключаем, что $V_1 + V_2 = V$, что и требовалось доказать.

Теорема 13.1. *Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.*

Доказательство. Построим правильную, вписанную в цилиндр, n -угольную призму и правильную описанную n -угольную призму. Вписанная призма содержится в цилиндре. Поэтому ее объем не больше объема цилиндра. Описанная призма содержит цилиндр. Поэтому ее объем не меньше объема цилиндра.

Впишем в основание вписанной призмы окружность (рис. 84). Радиус этой окружности $R_1 = R \cos \frac{\pi}{n}$.

Площадь основания вписанной призмы не меньше площади содержащегося в ней круга радиуса R_1 . Поэтому объем вписанной в цилиндр призмы не больше $\pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}$.

Отсюда следует, что объем цилиндра

$$V \geq \pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

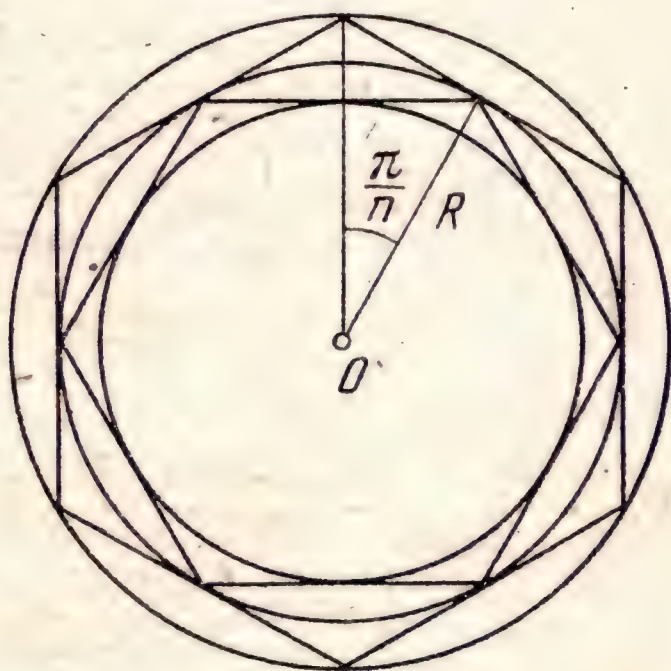


Рис. 84.

Теперь опишем окружность около основания описанной призмы. Ра-

диус этой окружности $R_2 = R / \cos \frac{\pi}{n}$. Основание описанной призмы содержится в круге радиуса R_2 . Поэтому площадь основания призмы не больше $\pi R^2 / \cos^2 \frac{\pi}{n}$. Соответственно, объем цилиндра

$$V \leq \frac{\pi R^2 H}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}.$$

Полученные два неравенства верны при любом n . При $n \rightarrow \infty \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1$. Поэтому из первого неравенства следует, что $V \geq \pi R^2 H$, а из второго неравенства следует, что $V \leq \pi R^2 H$. Следовательно,

$$V = \pi R^2 H,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что если из описанной призмы удалить вписанную, то мы получим простое тело, содержащее боковую поверхность цилиндра. Объем этого тела равен разности объемов призм, т. е. он не больше

$$\pi R^2 H \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \right).$$

При $n \rightarrow \infty$ этот объем стремится к нулю. Отсюда мы и заключаем, что любой конечный кусок цилиндрической поверхности можно заключить в простое тело сколь угодно малого объема.

Теорема 13.2. Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Доказательство. Построим правильную вписанную в конус n -угольную пирамиду и правильную описанную n -угольную пирамиду. Вписанная пирамида содержится в конусе. Поэтому ее объем не больше объема конуса. Описанная пирамида содержит конус. Поэтому ее объем не меньше объема конуса.

Впишем в основание вписанной пирамиды окружность (рис. 84). Радиус этой окружности $R_1 = R \cos \frac{\pi}{n}$. Площадь основания вписанной пирамиды не меньше площади содержащегося в ней круга радиуса R_1 . Поэтому объем вписанной в конус пирамиды не меньше $\frac{1}{3} \pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}$. Отсюда следует, что объем конуса

$$V \geq \frac{1}{3} \pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

Теперь опишем окружность около основания описанной пирамиды. Радиус этой окружности $R_2 =$

$= R / \cos \frac{\pi}{n}$. Основание описанной пирамиды содержится в круге радиуса R_2 . Поэтому площадь основания пирамиды не больше $\pi R^2 / \cos^2 \frac{\pi}{n}$. Соответственно, объем конуса

$$V \leq \frac{1}{3} \frac{\pi R^2 H}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}.$$

Полученные два неравенства верны при любом n . При $n \rightarrow \infty \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1$. Поэтому из первого неравенства следует, что $V \geq \frac{1}{3} \pi R^2 H$. Из второго неравенства следует, что $V \leq \frac{1}{3} \pi R^2 H$. Следовательно,

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что если из описанной пирамиды удалить вписанную, то мы получим простое тело, содержащее боковую поверхность конуса. Объем этого тела равен разности объемов пирамид, т. е. он не больше

$$\frac{1}{3} \pi R^2 H \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \right).$$

При $n \rightarrow \infty$ этот объем стремится к нулю. Отсюда мы заключаем, что любой конечный кусок конической поверхности можно заключить в простое тело сколь угодно малого объема.

Теорема 13.3. Объем усеченного конуса с радиусами оснований R_1 , R_2 и высотой H определяется по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

Вывод этой формулы основан на тех же соображениях, что и для усеченной пирамиды. Мы его приводить не будем.

Теорема 13.4. Объем шара радиуса R

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Доказательство. Плоскость, проходящая через центр шара, делит его на две равные части — два полушария. Поэтому достаточно найти объем полушара. Для удобства будем считать, что полушар расположен так, как показано на рис. 85. Проведем радиус, перпендикулярный основанию полушара, и разделим его на n равных частей. Через точки деления

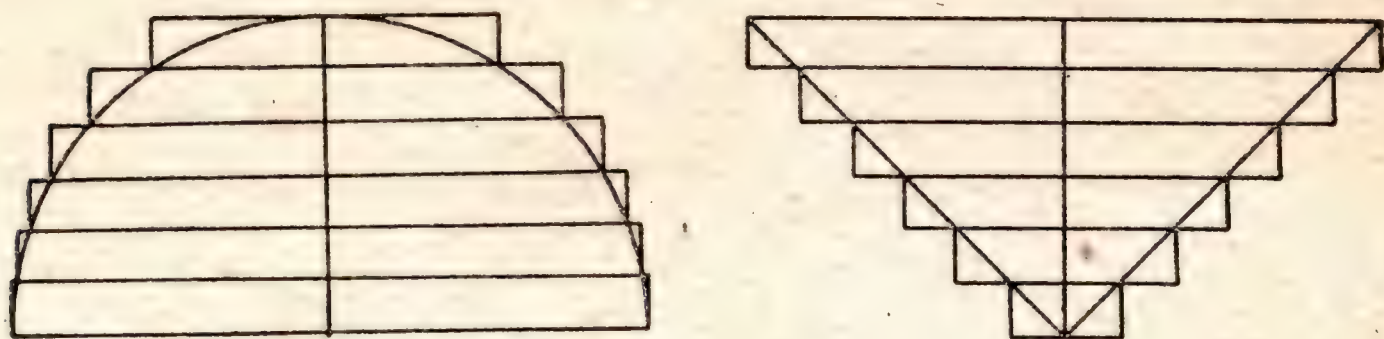


Рис. 85.

проведем плоскости, параллельные основанию полушара. Они разобьют полушар на n слоев (рис. 85, слева). Построим для каждого слоя содержащий его цилиндр с радиусом, равным радиусу нижнего основания слоя, и высотой, равной высоте слоя. Обозначим через v_m объем m -го цилиндра, считая от основания полушара.

Тело, составленное из построенных цилиндров, содержит полушар, поэтому имеет объем, не меньший объема полушара. Если все цилиндры опустить вниз на расстояние R/n , то все они попадут в полушар, кроме первого. Поэтому тело, составленное из всех цилиндров, кроме первого, имеет объем, не больший объема полушара. Таким образом, обозначая через V объем полушара, получаем неравенство

$$v_2 + v_3 + \dots + v_n \leq V \leq v_1 + v_2 + \dots + v_n. \quad (1)$$

Возьмем теперь конус с радиусом основания R и высотой тоже R . Разобьем его таким же способом на слои, как и полушар, и построим для каждого слоя цилиндр (рис. 85, справа). Обозначим через v'_m объем m -го цилиндра, считая от вершины конуса. Тело, составленное из цилиндров, содержит конус. Поэтому объем этого тела не меньше объема конуса. Если цилиндры поднять на R/n , то все они, кроме последнего, войдут в конус. Поэтому составленное из них тело

имеет объем не больше объема конуса. Таким образом, обозначая через V' объем конуса, получаем неравенство

$$v'_1 + v'_2 + \dots + v'_{n-1} \leq V' \leq v'_1 + v'_2 + \dots + v'_n. \quad (2)$$

Найдем сумму объемов $v'_m + v_{m+1}$. По теореме Пифагора радиус основания $(m+1)$ -го цилиндра для полушара равен $\sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{n} R\right)^2}$. Поэтому объем

$$v_{m+1} = \pi \left[R^2 - \left(\frac{m}{n} R\right)^2 \right] \frac{R}{n}.$$

Радиус m -го цилиндра для конуса равен $\frac{m}{n} R$. Поэтому объем

$$v'_m = \pi \left(\frac{m}{n} R \right)^2 \frac{R}{n}.$$

Мы видим, что

$$v'_m + v_{m+1} = \frac{\pi R^3}{n}.$$

Складывая неравенство (1) и (2) почленно, получим

$$\frac{n-1}{n} \pi R^3 \leq V + V' \leq \frac{n-1}{n} \pi R^3 + v_1 + v'_n.$$

Так как это неравенство верно при любом n , а при $n \rightarrow \infty$ $v_1, v'_n \rightarrow 0$, то $\pi R^3 \leq V + V' \leq \pi R^3$. Следовательно $V + V' = \pi R^3$.

Так как объем конуса $V' = \frac{1}{3} \pi R^3$, то объем полушара равен $\frac{2}{3} \pi R^3$, а объем шара равен $\frac{4}{3} \pi R^3$. Теорема доказана.



Рис. 86.

Шаровым сегментом называется тело, отсекаемое плоскостью от шара (рис. 86). Объем шарового сегмента определяется по формуле

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right),$$

где R — радиус шара, от которого отсекается сегмент, а H — высота сегмента. Эта формула выводится таким же способом, как и формула для объема полушара.

Шаровым сектором называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса следующим

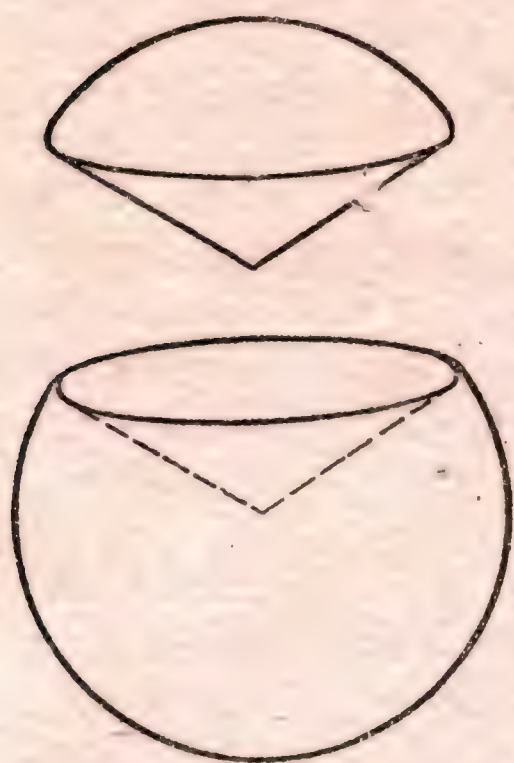


Рис. 87.

образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием служит основание сегмента. Если же сегмент больше полусферы, то указанный конус из него удаляется (рис. 87). Объем шарового сектора получается сложением или вычитанием объемов соответствующего сегмента и конуса. Для объема шарового сектора получается следующая формула:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H,$$

где R — радиус, а H — высота соответствующего шарового сегмента.

Докажем теперь, что сферу можно заключить в простое тело сколь угодно малого объема. Пусть R — радиус сферы. Построим два concentric ей шара T_1 и T_2 с радиусами $R - \varepsilon$ и $R + \varepsilon$, где ε — малое положительное число. Разобьем пространство на малые кубы с диагональю, меньшей ε . Построим теперь два простых тела T'_1 и T'_2 следующим образом. Тело T'_1 состоит из шара T_1 и всех тех кубов, которые имеют с ним хотя бы одну общую точку. Тело T'_2 получается из шара T_2 вырезанием тех кубов, которые содержат как точки шара так и точки вне шара.

Тело T'_1 имеет объем не меньший объема шара T_1 , т. е. не меньше $\frac{4}{3} \pi (R - \varepsilon)^3$. Тело T'_2 имеет объем не

большший объема шара T_2 , т. е. не больше $\frac{4}{3} \pi (R + \varepsilon)^3$.

Простое тело, которое получается из тела T'_2 вырезанием тела T'_1 , содержит нашу сферу и имеет объем

не больше

$$\frac{4}{3} \pi \{ (R + \varepsilon)^3 - (R - \varepsilon)^3 \} = \frac{8}{3} \pi (3R^2 + \varepsilon^2) \varepsilon.$$

При достаточно малом ε объем этого тела как угодно мал, что и требовалось доказать.

§ 14. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Полной выпуклой поверхностью называется граница выпуклого тела. А *выпуклым телом* называется такое тело, которое вместе с любыми двумя его точками содержит соединяющий их отрезок. Примеры выпуклых тел: выпуклый многогранник, цилиндр, конус, шар.

Для фигур, расположенных на полной выпуклой поверхности, можно ввести понятие внутренней и граничной точки, подобно тому как это было сделано для фигур на плоскости в § 9. Именно, точка X фигуры G на полной выпуклой поверхности F называется *внутренней*, если все достаточно близкие к ней точки поверхности F тоже принадлежат фигуре G . Точка X называется *граничной* точкой для фигуры G , если есть как угодно близкие к ней точки фигуры G и точки, не принадлежащие фигуре G .

Например, если полную выпуклую поверхность рассечь плоскостью, то у фигуры, которая состоит из всех точек поверхности, лежащих по одну сторону плоскости, все точки внутренние, кроме точек, лежащих в секущей плоскости. Точки, лежащие в секущей плоскости, — граничные.

Фигура на полной выпуклой поверхности называется *областью*, если все ее точки внутренние и она не распадается на две фигуры, обладающие этим свойством. Если к области присоединить ее границу, то мы получим *замкнутую область*. Она называется просто *выпуклой поверхностью*. Например, боковая поверхность цилиндра, конуса, сферический сегмент — представляют собой выпуклые поверхности.

Для того чтобы данное ниже определение площади поверхности было естественным, рассмотрим одну практическую задачу. Представим себе купол здания и плоский лист железа в форме квадрата со стороной

1 м. Пусть купол здания и лист железа окрашиваются. Если на окраску купола пошло v_1 литров краски, а на окраску листа железа v_2 литров краски, то естественно считать, что купол здания в v_1/v_2 больше листа железа. Величина v_1/v_2 характеризует величину поверхности купола в сравнении с единицей площади в 1 м^2 . Количество краски, необходимое для покраски листа железа, примерно равно объему параллелепипеда с квадратом $1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$ в основании и высотой h , равной толщине красочного покрытия. Поэтому для оценки площади купола получается величина $v_1/h \text{ м}^2$.

Перейдем теперь к геометрическому определению площади поверхности. Пусть F — данная поверхность. Построим тело F_h , состоящее из тех точек пространства, для каждой из которых найдется точка поверхности F на расстоянии, не большем h . Наглядно тело F_h можно представить себе как тело, заполненное краской, при окрашивании поверхности F с обеих сторон слоем краски толщиной h .

Пусть V_h — объем тела F_h . *Площадью поверхности F* мы будем называть предел отношения $V_h/2h$ при $h \rightarrow 0$, т. е. $S = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_h}{2h}$.

Можно доказать, что для таких простых выпуклых поверхностей, как боковая поверхность призмы и пирамиды, данное определение дает прежнее значение площади поверхности — сумму площадей боковых граней.

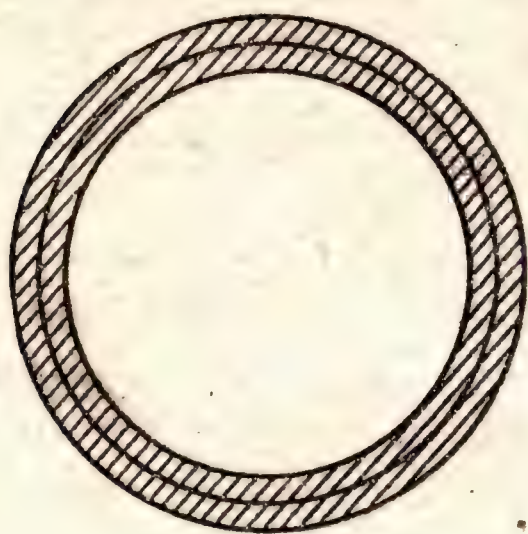


Рис. 88.

Теорема 14.1. *Площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.*

Доказательство. Пусть F — данная сфера. Тело F_h , о котором идет речь в определении площади поверхности, представляет собой слой между двумя концентрическими сферами радиусов $R+h$ и $R-h$

(рис. 88). Объем этого тела равен разности объемов шаров радиуса $R+h$ и $R-h$, т. е.

$$V_h = \frac{4}{3} \pi \{ (R+h)^3 - (R-h)^3 \}.$$

Имеем

$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3 \cdot 2h} (6hR^2 + 2h^3) = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right).$$

При $h \rightarrow 0$ отношение $V_h/2h$ стремится к пределу $4\pi R^2$, что и требовалось доказать.

Теорема 14.2. *Площадь сферического сегмента радиуса R и высоты H равна*

$$S = 2\pi RH.$$

Доказательство. Пусть F — сегмент, отсекаемый от сферы радиуса R , и F_h — тело, о котором идет речь в определении площади поверхности. Проведем две концентрические

сферы радиусом $R + h$ и $R - h$. Из центра сфер проведем две конические поверхности, как указано на рис. 89. Здесь a' и a'' — образующие этих конических поверхностей. Тело T' , ограниченное концентрическими сферами и конической

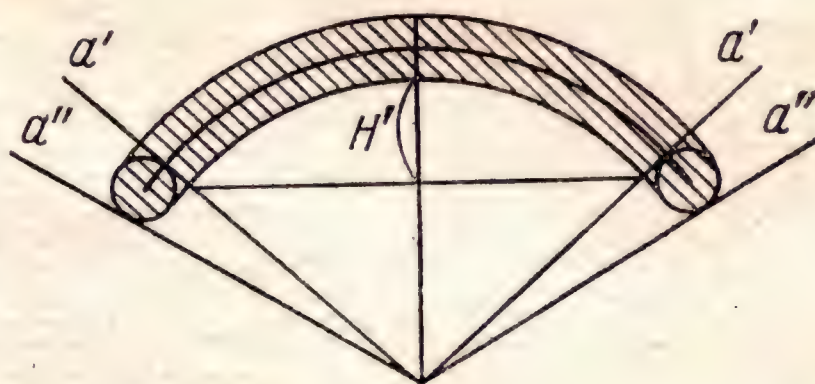


Рис. 89.

поверхностью с образующими a' , содержится в теле F_h . Тело T'' , ограниченное концентрическими сферами и конической поверхностью с образующими a'' , содержит тело F_h . Поэтому объемы этих тел V' , V'' и V_h удовлетворяют неравенству

$$V' \leq V_h \leq V''.$$

Объем тела T' есть разность объемов двух подобных шаровых секторов с коэффициентом подобия $(R+h)/(R-h)$. Если обозначить через H' высоту сегмента, соответствующего меньшему из этих секторов, то объем сектора будет $\frac{2}{3} \pi (R-h)^2 H'$. Соответственно, объем тела T'

$$V' = \frac{2}{3} \pi (R-h)^2 H' \left\{ \left(\frac{R+h}{R-h} \right)^3 - 1 \right\} = \frac{2}{3} \pi H' \frac{6R^2h + 2h^3}{R-h}.$$

Аналогично, объем тела T''

$$V'' = \frac{2}{3} \pi H'' \frac{6R^2h + 2h^3}{R-h}.$$

Отсюда

$$\frac{V'}{2h} = 2\pi R H' \frac{R + \frac{h^2}{3R}}{R - h}, \quad \frac{V''}{2h} = 2\pi R H'' \frac{R + \frac{h^2}{2R}}{R - h}.$$

При $h \rightarrow 0$ высоты сегментов H' и H'' стремятся к высоте H данного сегмента. Поэтому при $h \rightarrow 0$ оба отношения, $V'/2h$ и $V''/2h$, стремятся к одному и тому же пределу $2\pi R H$. Так как отношение $V_h/2h$ заключено между $V'/2h$ и $V''/2h$, то оно стремится к тому же пределу. Теорема доказана.

Теорема 14.3. *Площадь боковой поверхности цилиндра радиуса R и высоты H равна $2\pi R H$.*

Доказательство. Пусть F — боковая поверхность данного цилиндра. Построим две концентрические

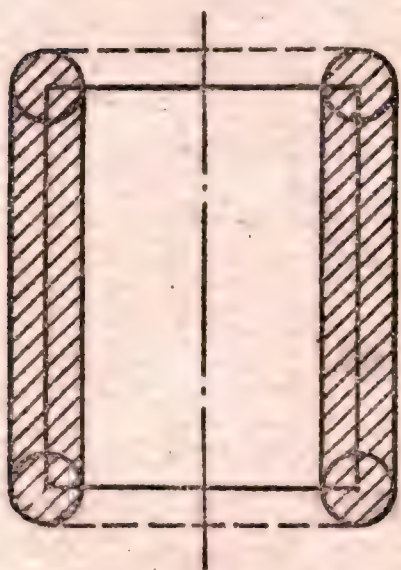


Рис. 90.

цилиндрические поверхности с той же осью, что и данная, и радиусами $R + h$, $R - h$ (рис. 90). Тело T' , ограниченное этими цилиндрическими поверхностями и плоскостями оснований данного цилиндра, содержится в теле F_h , о котором идет речь в определении площади поверхности.

Если плоскости оснований раздвинуть, смещая верхнее основание вверх, а нижнее основание вниз на расстояние h , то тело T'' , ограниченное цилиндрическими поверхностями и смещенными основаниями, будет содержать тело F_h . Следовательно, объемы V' и V'' тел T' и T'' и объем V_h тела F_h удовлетворяют неравенству $V' \leq V_h \leq V''$.

Объемы тел T' и T'' находятся как разности объемов соответствующих цилиндров. Имеем

$$V' = \pi H [(R + h)^2 - (R - h)^2],$$

$$V'' = \pi (H + 2h) [(R + h)^2 - (R - h)^2].$$

Отсюда

$$\frac{V'}{2h} = 2\pi R H, \quad \frac{V''}{2h} = 2\pi R (H + 2h).$$

При $h \rightarrow 0$ оба отношения $V'/2h$ и $V''/2h$ стремятся к одному и тому же пределу $2\pi R H$. Следовательно, от-

ношение $V_h/2h$, будучи заключено между $V'/2h$ и $V''/2h$, стремится к тому же пределу. Теорема доказана.

Теорема 14.4. *Площадь боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований R и r и образующей длины l определяется по формуле*

$$S = \pi(R + r)l.$$

Доказательство (рис. 91). Пусть F — данная коническая поверхность. Дополним ее до полной конической поверхности и сместим вверх так, чтобы расстояние между образующими исходной поверхности и смещенной в осевом сечении было h . В этом положении смещенную поверхность обозначим F_1 . Аналогично поверхность F сместим вниз и в этом положении обозначим ее F_2 .

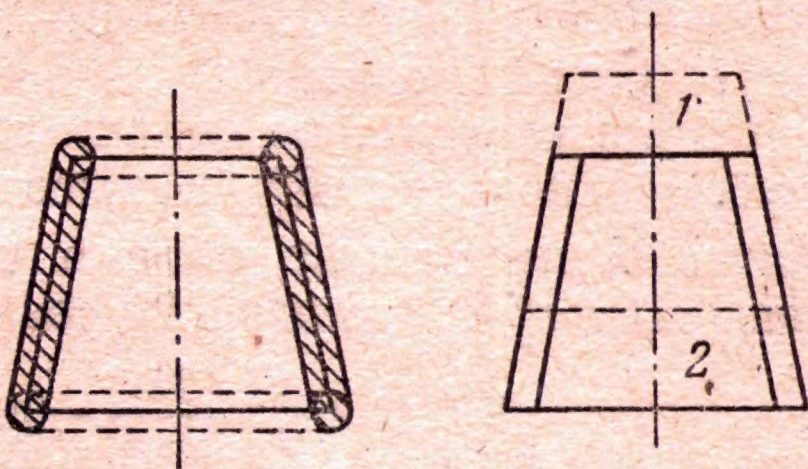


Рис. 91.

Сблизим теперь плоскости оснований исходного конуса, смещая каждую из них на расстояние h . Тело T' , ограниченное коническими поверхностями F_1, F_2 и смещенными плоскостями оснований, содержится в теле F_h , которое фигурирует при определении площади поверхности.

Если плоскости оснований раздвинуть, смещая каждую на расстояние h , то получим тело T'' , содержащее тело F_h . Поэтому объемы V' и V'' тел T' и T'' и объем V_h тела F_h удовлетворяют неравенству $V' \leq V_h \leq V''$.

Объем тела T' есть разность объемов двух усеченных конусов (рис. 91, справа). Пусть r'_1 и R'_1 — радиусы оснований большего конуса, а r'_2 и R'_2 — радиусы оснований меньшего конуса.

Сместим внутренний конус вверх на расстояние, равное $2h/\cos \alpha$, где α — угол между образующими конуса и основанием, при этом боковые поверхности конусов частично совместятся. Разность объемов конусов будет равна разности объемов конусов 2 и 1, изображенных пунктиром.

Объем конуса 2 не меньше объема цилиндра с радиусом основания R'_2 и высотой $2h/\cos \alpha$, а объем конуса 1 не больше объема цилиндра с радиусом основания r'_1 и высотой $2h/\cos \alpha$. Поэтому $V' \geq \pi R'^2_2 \frac{2h}{\cos \alpha} - \pi r'^2_1 \frac{2h}{\cos \alpha}$. Отсюда $\frac{V'}{2h} \geq \frac{\pi}{\cos \alpha} (R'^2_2 - r'^2_1)$.

Аналогично, объем тела T'' представляет собой разность объемов двух усеченных конусов. Пусть R''_1, r''_1 и R''_2, r''_2 — радиусы их оснований. Сдвинем внутренний конус вверх на расстояние $2h/\cos \alpha$. Тогда объем тела T''_2 будет равен разности объемов конусов 2 и 1 (рис. 91, справа).

Объем конуса 2 не больше объема цилиндра с радиусом основания R''_1 и высотой $2h/\cos \alpha$, а объем конуса 1 не меньше объема цилиндра с радиусом основания r''_2 и высотой $2h/\cos \alpha$. Поэтому

$$V'' \leq \pi R''^2_1 \frac{2h}{\cos \alpha} - \pi r''^2_2 \frac{2h}{\cos \alpha}.$$

Отсюда $\frac{V''}{2h} \leq \frac{\pi}{\cos \alpha} (R''^2_1 - r''^2_2)$. Так как $V'/2h \leq V_h/2h \leq V''/2h$, то

$$\frac{\pi}{\cos \alpha} (R'^2_2 - r'^2_1) \leq \frac{V_h}{2h} \leq \frac{\pi}{\cos \alpha} (R''^2_1 - r''^2_2).$$

При $h \rightarrow 0$ радиусы R'_2 и R''_1 стремятся к радиусу нижнего основания данного конуса, а r'_1 и r''_2 стремятся к радиусу верхнего основания. Поэтому левая и правая стороны неравенства стремятся к одному и тому же пределу $\pi(R^2 - r^2)/\cos \alpha$. К этому же пределу стремится и величина $V_h/2h$.

Замечая, что длина образующей конуса $l = \frac{R - r}{\cos \alpha}$, видим, что площадь боковой поверхности конуса

$$S = \pi(R + r)l.$$

Теорема доказана.

Площадь боковой поверхности конуса с радиусом основания R и образующей l определяется по формуле

$$S = \pi Rl.$$

Эта формула получается из предыдущей при $r = 0$.

Цена 14 к.